CONTROLO DO PÊNDULO INVERTIDO QUESTIONÁRIO

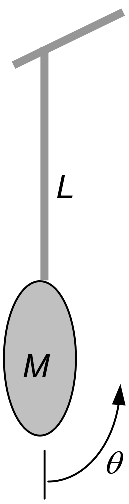
Objectivos	*Modelizar um pêndulo invertido rígido de comprimento L e massa M, supondo uma entrada de binário. Simular em computador. Tentar estabilizar o pêndulo em ciclo aberto por manipulação directa do binário.* *Estudar o controlo do pêndulo em servocomando.* *Estudar o controlo do pêndulo em inversão por regulação com um modelo linear. Determinar um modelo de estado. Calcular um controlador com realimentação proporcional derivativa (realimentação de posição e velocidade angulares) capaz de estabilizar o pêndulo na região de validade do modelo linear e com resposta temporal adequada. Simular.* *Estudar a situação decorrente de o actuador não ser estático.*

1. Estudo do pêndulo

Consideremos um pêndulo rígido de massa M e comprimento L. O pêndulo é suposto ideal: inexistência de atrito e haste de massa 0.

A origem da medida do deslocamento angular θ é a posição de equilíbrio. A velocidade angular é ω e a aceleração angular é α .

Considerar-se-á M=0.1 kg e L=0.1 m.



1.1 Mostrar que nas condições anteriores o pêndulo é descrito pela equação diferencial:

$$J\ddot{\theta} = MgL\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{com } J = ML^2. \tag{1.1}$$

1.2 Realizar um modelo de simulação e obter registos de simulação do comportamento do pêndulo para velocidade angular inicial nula e deslocamentos angulares iniciais de $\pi/40, \pi/2, \pi-0.1, \pi$, em intervalo de tempo apropriado.

1.3 Comparar os desvios de predição do comportamento entre o modelo (1.1) e o modelo linearizado

$$J\ddot{\theta} = MgL\theta \tag{1.2}$$

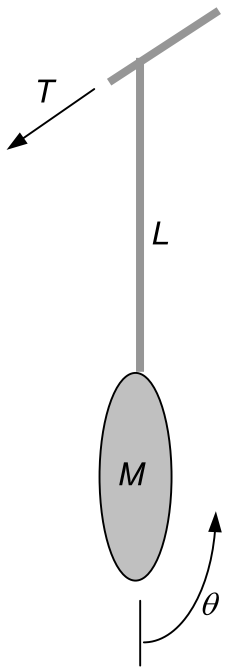
sobre um intervalo de tempo de 50s. Determinar por simulação o intervalo de valores de deslocamento inicial em que a linearização é válida. Em particular: comparar o valor da frequência de oscilação do modelo linearizado (qual a sua expressão?) com o modelo não-linear.

1.3.1 Determinar um modelo de estado para (1.2).

1.4 Para o modelo (1.1), determinar analiticamente o valor de $\omega(0)$ que para $\theta(0)=0$ coloca o pêndulo em inversão $\theta(\infty)=\pi$. Para tal, raciocinar com base na igualdade das energias potencial e cinética. Observar o resultado da simulação com o valor determinado. O comportamento simulado é ideal? Se não é, indicar possíveis razões para tal.

1.5 Modificar o modelo (1.1) de forma a reflectir a existência de atrito proporcional à velocidade angular com constante de proporcionalidade B_ω. Estimar um valor de B_ω tal que oscilações com $\theta(0)=\pi/40$ se reduzam a menos de 2% do valor inicial em 2m30s. Este valor pode ser estimado por tentativas em simulação ou pode ser determinado a partir do modelo linear. Neste último caso como?

2. Controlo do pêndulo – ciclo aberto



Consideramos agora o problema de controlar a posição angular do pêndulo. Para tal vamos supor que se dispõe da possibilidade de aplicar ao eixo do pêndulo um binário externo T conforme a figura.

2.1 Supondo o pêndulo ideal (não-existência de atrito). Modificar o modelo (1.1) de forma a reflectir esta possibilidade.

2.2 Qual o valor mínimo de binário exterior de que se deve dispor para que $\alpha > 0$ no percurso $\theta(0)=0$ a $\theta=\pi$ (com $\omega(0)=0$)?

2.3 Verificar em simulação qual o comportamento do pêndulo se aplicarmos um binário T constante e de valor igual ao determinado em 2.2?

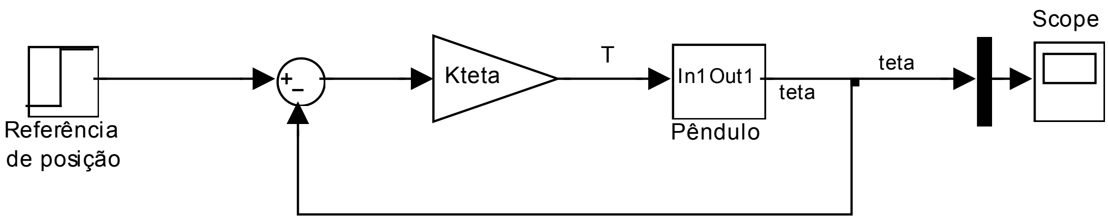
2.4 Estimar por simulação o valor mínimo de binário constante capaz de provocar um comportamento do pêndulo semelhante ao de

2.3 (rotação continuada). Este valor é inferior ao determinado em 2.2. Porquê?

2.5 Vamos definir o seguinte problema de controlo de servocomando para o pêndulo (ideal): a partir de $\theta(0)=0$ e $\omega(0)=0$ colocar o pêndulo numa posição angular desejada θ_R no intervalo $[0,\pi]$. Indicar razões que tornam a solução matemática deste problema difícil de implementar numa aproximação de controlo em ciclo aberto (manipulação do binário exterior T sem realimentação). Em particular para o caso $\theta_R=\pi$ mostrar que a solução não funciona na prática.

3. Controlo do pêndulo – ciclo fechado

Considerar agora a aplicação de realimentação negativa para solucionar o problema enunciado em 2.5 (pêndulo sem atrito), segundo o diagrama:

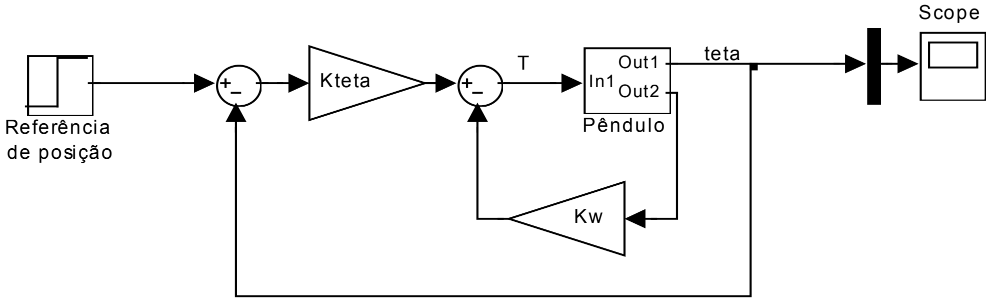


3.1 Realizar simulações com diferentes valores de ganho K_θ, para $\theta_R=\pi$ e $\theta_R=\pi/2$. Que se conclui?

3.2 A realimentação de posição origina um comportamento estável, mas penas marginalmente – o pêndulo oscila em torno da posição desejada. Podemos suspeitar que tal se deve à inexistência de atrito. Portanto: modificar o modelo do pêndulo de forma a incluir atrito nas condições de 1.5 e simular de novo. Que se observa?

3.3 A diminuição de oscilações observada em 3.2 sugere que uma realimentação negativa de velocidade angular poderá melhorar substancialmente o comportamento (o efeito do atrito aparece como uma realimentação negativa de velocidade inerente ao pêndulo).

Adicionar realimentação de velocidade (para o modelo do pêndulo sem atrito), segundo o diagrama:



3.3.1 Simular para $\theta_R = \pi / 2$ com diferentes valores de K_θ e K_ω. Quais as características da resposta. Existe erro em regime permanente?

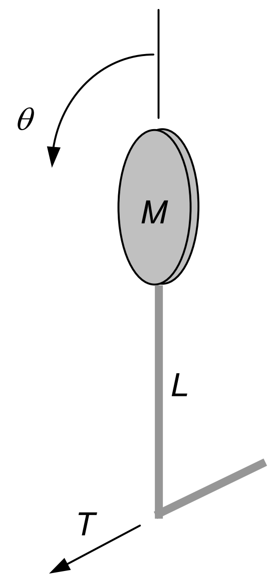
3.3.2 Repetir 3.3.1 para $\theta_R = \pi$.

4. Controlo do pêndulo em inversão

Os esquemas de controlo anteriores são insatisfatórios no seguinte sentido: o ajuste dos valores dos ganhos de realimentação não foram realizados com base em teoria que permita fazer o referido ajuste de uma forma sistemática e prever quantitativamente o efeito no comportamento do sistema realimentado de variações nesses ajustes. A teoria dos sistemas lineares permite fazê-lo, embora num domínio de aplicação mais restrito.

Para aclarar esta questão, vamos considerar um problema mais restrito a resolver com um modelo linear: o controlo do pêndulo em inversão por regulação.

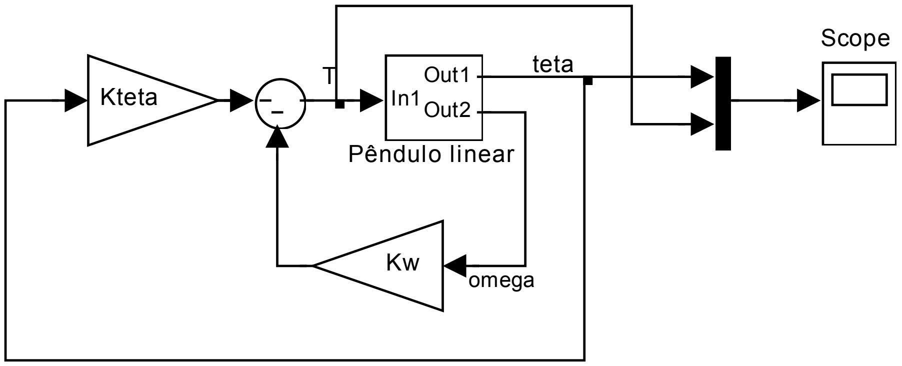
Mudamos a origem da medida do deslocamento angular θ para a forma indicada na figura. Nesta situação $\theta = 0$ corresponde à posição desejada e o objectivo do sistema de controlo será fazer com que θ convirja para 0, se $\theta(0) \neq 0$, dentro dos limites de validade do modelo linear.



4.1 Modificar o modelo (1.1) de forma a representar a nova situação.

4.2 Idem para o modelo (1.2), que se utilizará seguidamente.

4.3 O esquema de controlo que se utiliza agora representa-se pelo seguinte diagrama:



Simular o comportamento do pêndulo para $\theta(0) = \pi / 40$ e diferentes valores de K_θ e K_ω. Tentar obter uma resposta em que o pêndulo regresse rapidamente à posição de inversão com pouca ou nenhuma oscilação. Observar o esforço de controlo, isto é a evolução (e valor máximo) de T.

4.4 Proceder ao estudo teórico do sistema de controlo com base no facto de o seu modelo ser linear. Isto pode ser feito de duas formas:

a) Obter a equação diferencial linear que representa o sistema (não apenas o pêndulo) e estabelecer o seu operador de condições iniciais. As raízes do denominador deste operador são os pólos do sistema. O valor dos pólos depende dos parâmetros do pêndulo e dos ganhos de realimentação. Mudando os valores destes últimos pode mudar-se a posição dos pólos e logo impor um determinado coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural de oscilação ω_n. Estes dois últimos valores determinam a velocidade de resposta e taxa de extinção das oscilações.

b) Uma forma alternativa, e porventura mais fácil e compreensível, é através da modelização em espaço de estados. A partir do modelo determinado para o pêndulo em 1.3.1, pode escrever-se um modelo para o pêndulo com binário externo aplicado. A partir deste modelo, e visto que o binário se exprime como uma combinação linear das variáveis de estado θ e ω pesadas pelos ganhos K_θ e K_ω, podemos estabelecer um modelo de estado para o sistema de controlo (não apenas para o pêndulo) da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

Este modelo representa o comportamento do sistema para condições iniciais não nulas – $x(0) \neq 0$, ou seja, o comportamento de regulação da posição do pêndulo, se para um determinado instante de tempo $t = 0$, o estado está perturbado: $x(0) \neq 0$.

Os valores próprios da matriz A (cujo valor numérico é determinável em Matlab® pelo comando `eig`) são os pólos do sistema e o raciocínio da alínea anterior quanto à frequência natural de oscilação e coeficiente de amortecimento aplica-se. (A expressão simbólica dos valores próprios determina-se a partir da equação característica de A ou por $\det(sI - A) = 0$.)

4.5 Estabelecer especificações temporais da resposta em termos de (primeiro) tempo de regresso a zero e tempo de estabelecimento (tempo apara a amplitude das oscilações diminuir abaixo de um certo valor). Traduzir estas especificações em termos de frequência natural de oscilação e coeficiente de amortecimento. Determinar valores de K_θ e K_ω que satisfaçam as especificações. Verificar a validade do projecto por simulação.

4.6 O problema pode agora ser modelizado de uma forma mais realista se se considerar que o transdutor que aplica o binário externo ao pêndulo é modelizado como um sistema de primeira ordem. O sistema de controlo será agora de terceira ordem. Realizar um estudo sumário desta situação.