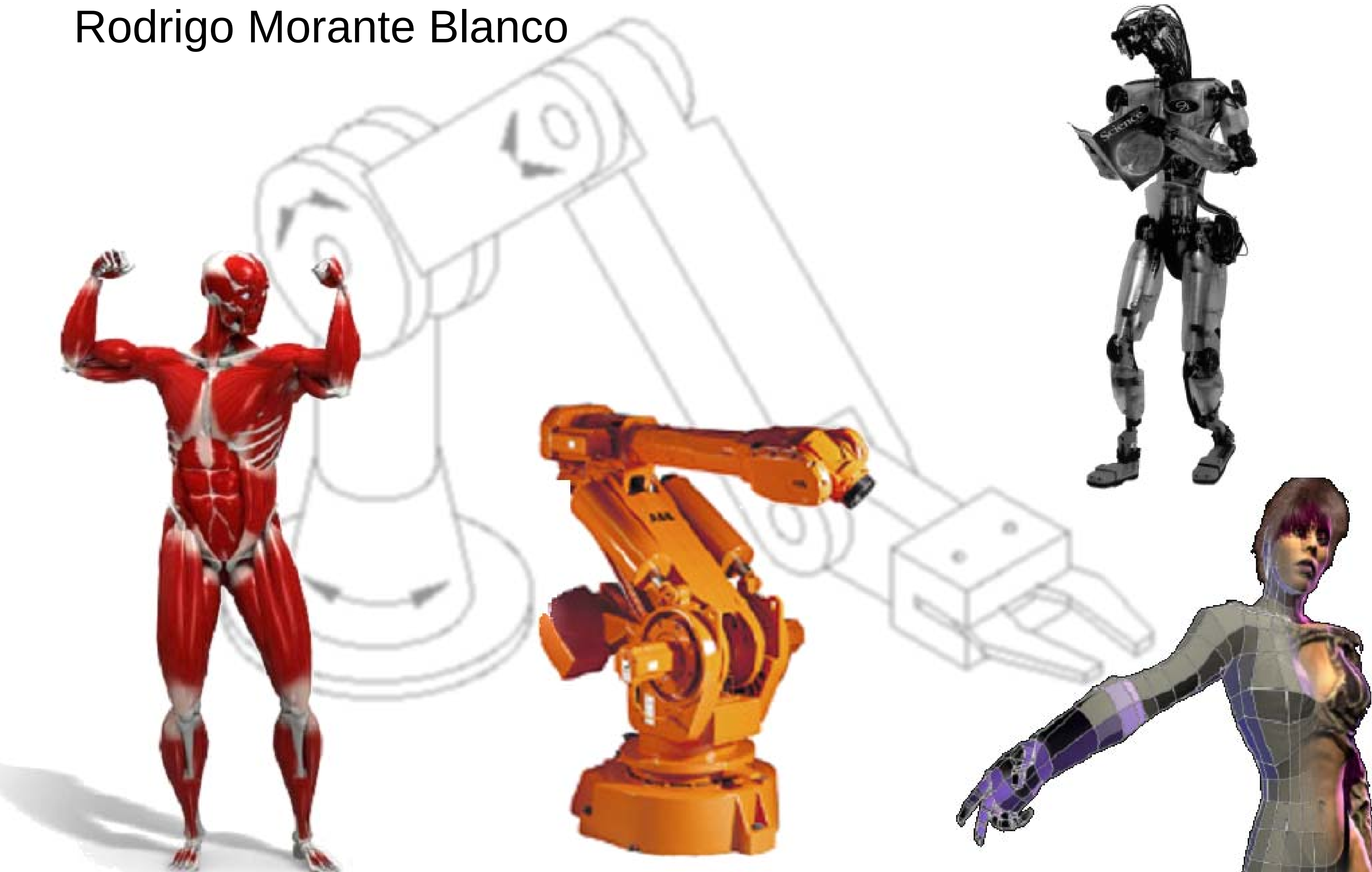
CINEMÁTICA INVERSA

Rodrigo Morante Blanco



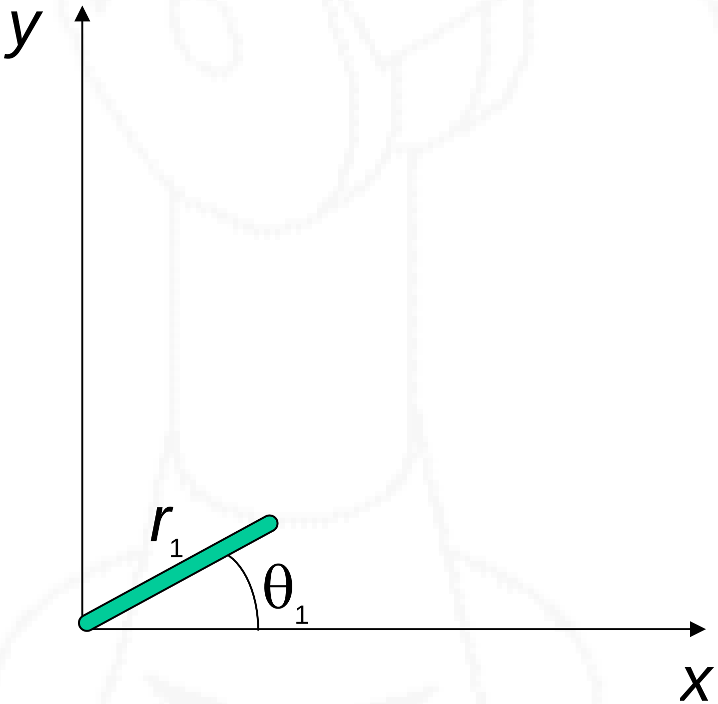
Objetivos

- **Cinemática direta**
  - Introdução
  - Representação de Denavit-Hartenberg (D-H)

- **Cinemática inversa**
  - Introdução
  - Cálculo do jacobiano
  - Inversa generalizada
  - Transposta do jacobiano

Cinemática direta (1/5)

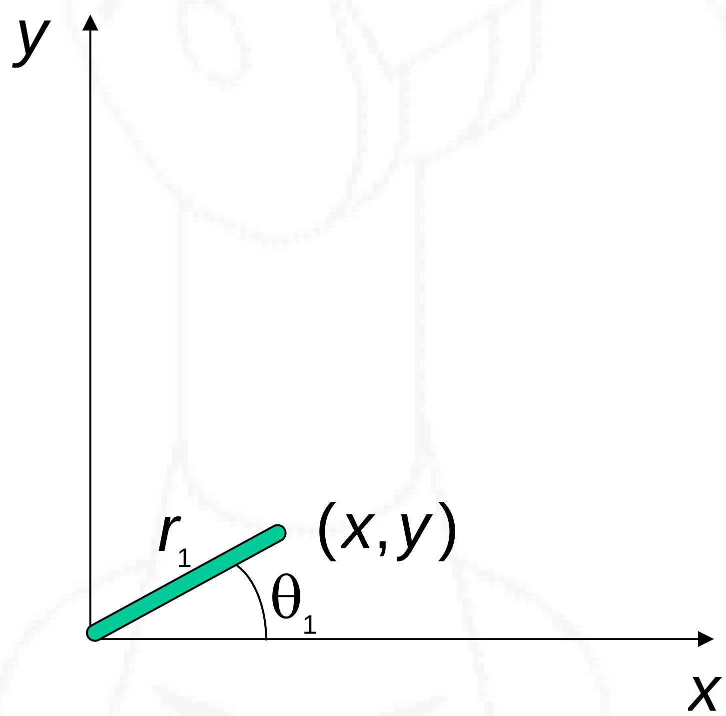
A ***cinemática direta*** permite determinar a localização do extremo de um membro se conhecidos os valores das ***coordenadas articulares***.



Coordenadas articulares: r, θ

Cinemática direta (1/5)

A ***cinemática direta*** permite determinar a localização do extremo de um membro se conhecidos os valores das ***coordenadas articulares***.



Coordenadas articulares: r, θ

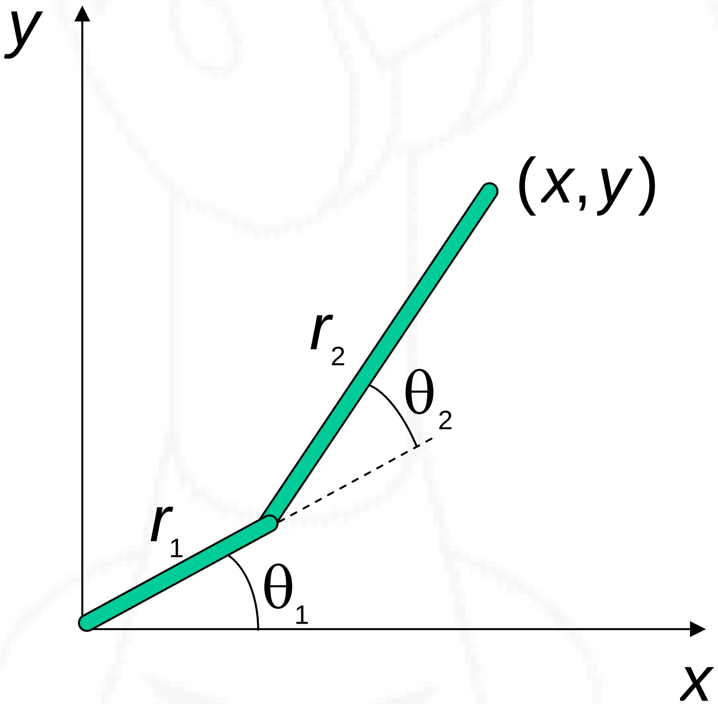
Método geométrico:

$$x = r_1 \cos\theta_1$$

$$y = r_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

Cinemática direta (1/5)

A ***cinemática direta*** permite determinar a localização do extremo de um membro se conhecidos os valores das ***coordenadas articulares***.



Coordenadas articulares: r, θ

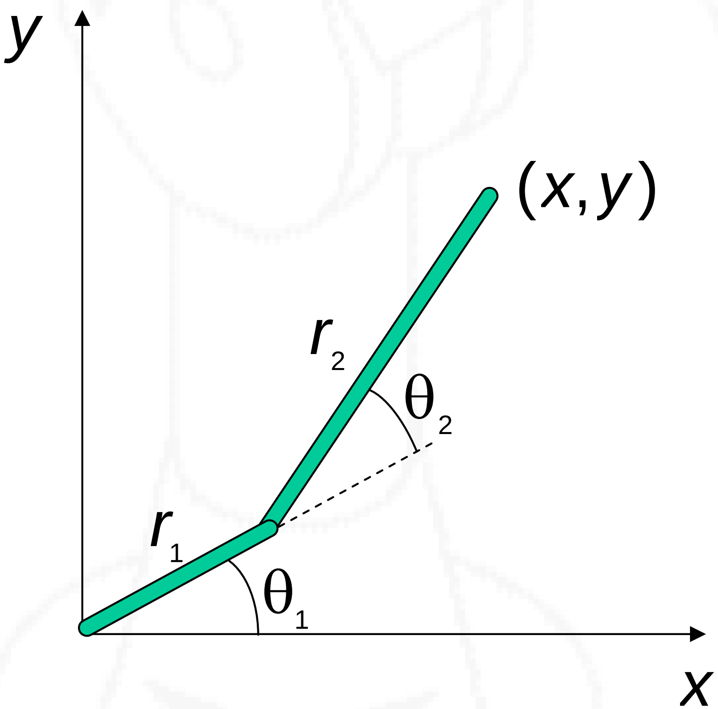
Método geométrico:

$$x = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Cinemática direta (1/5)

A ***cinemática direta*** permite determinar a localização do extremo de um membro se conhecidos os valores das ***coordenadas articulares***.



Coordenadas articulares: r, θ

Método geométrico:

$$x = r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

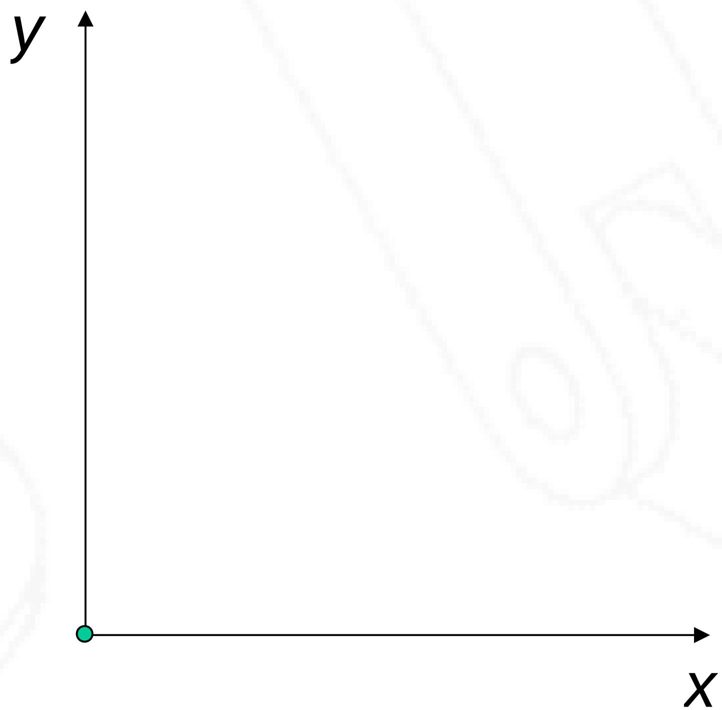
$$y = r_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_1 + r_2 \,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Esta abordagem não é sistemática

Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

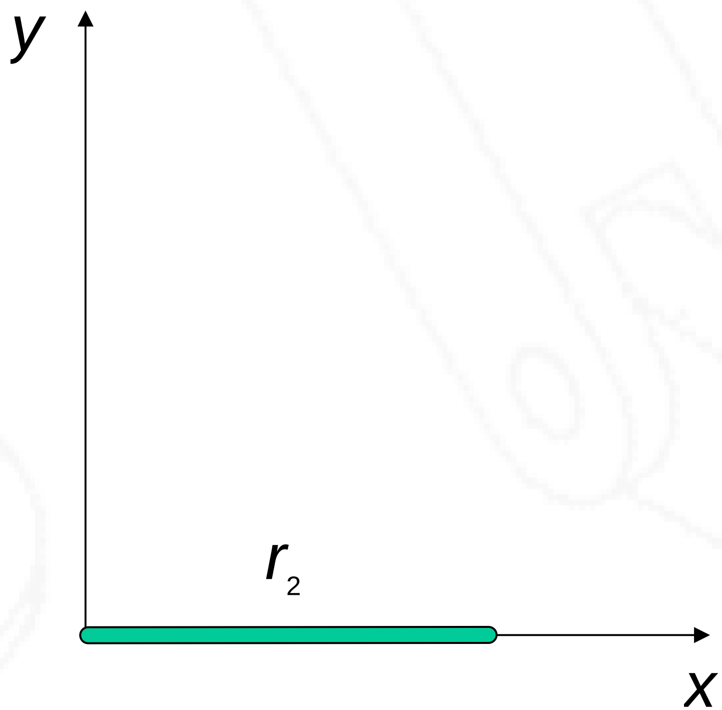
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

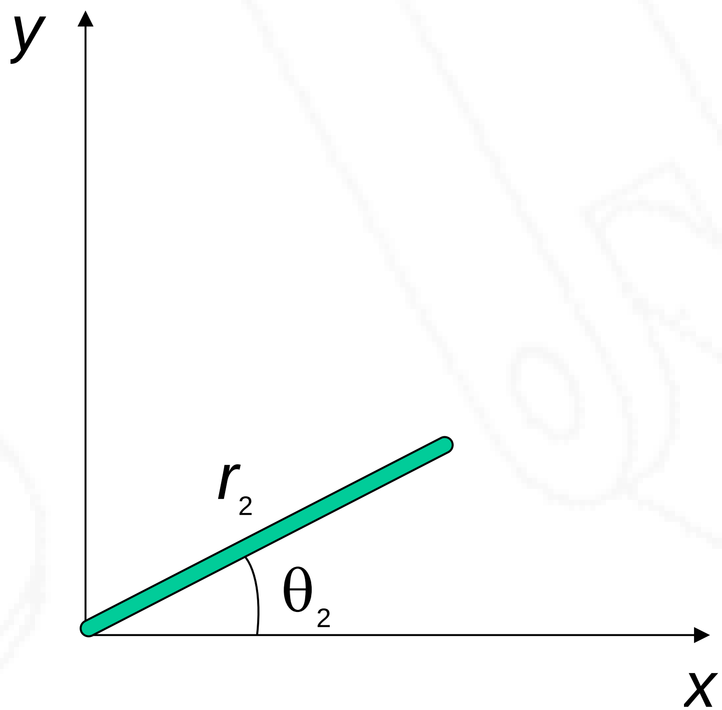
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

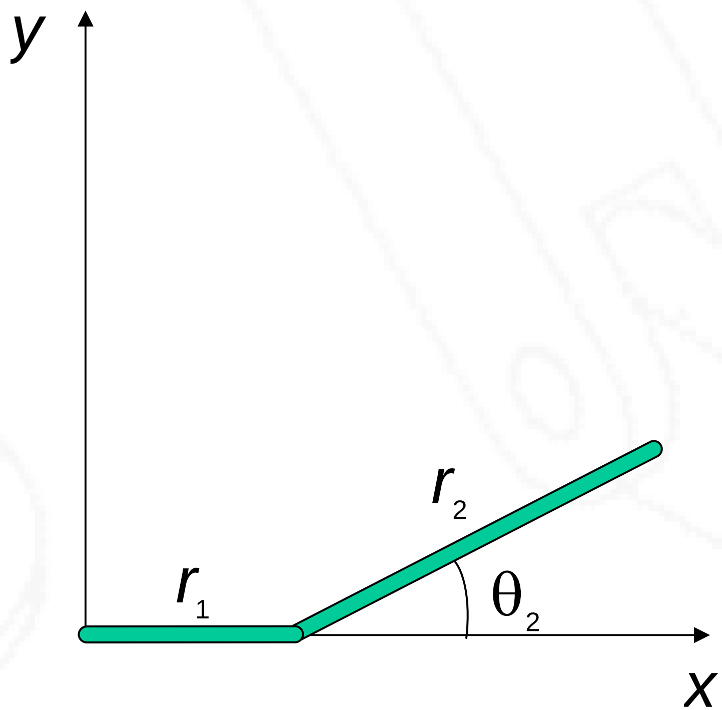
$$\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

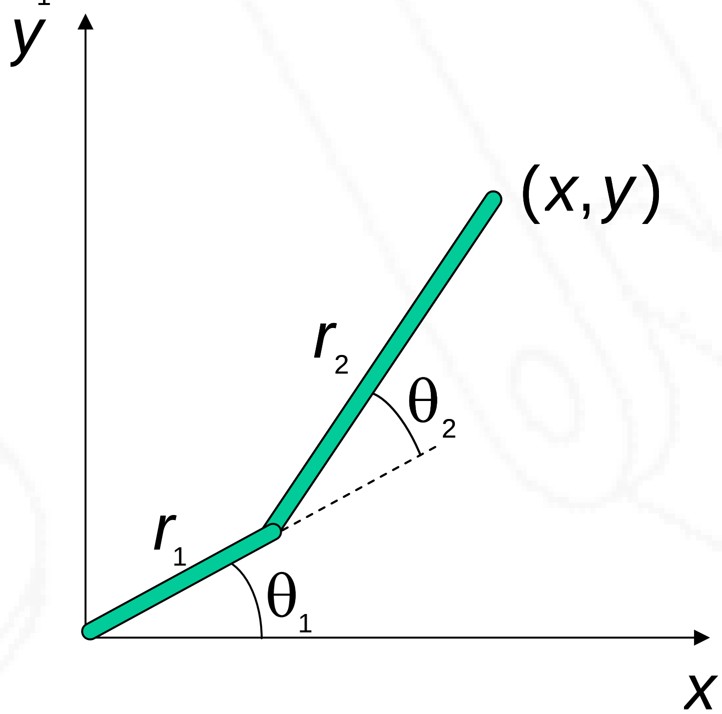
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

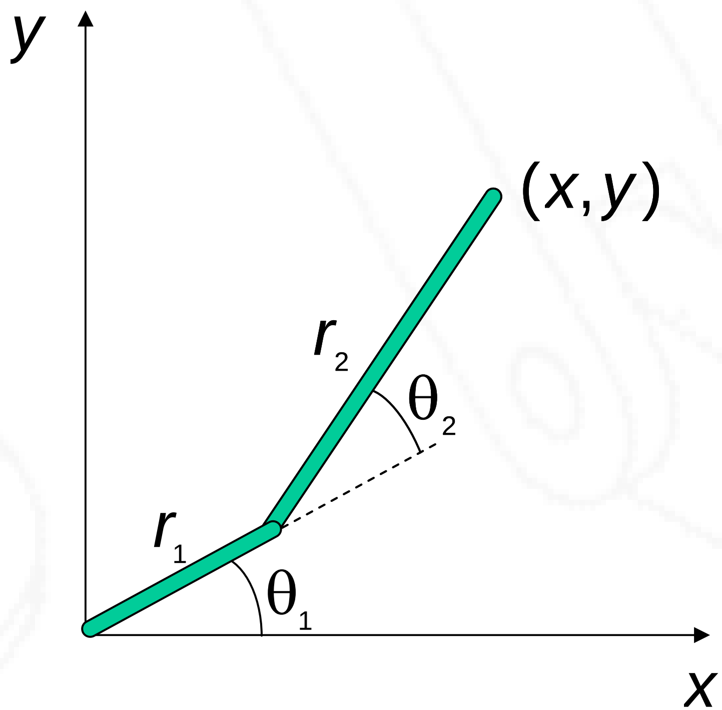
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{0}A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^{1}A_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (2/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & r_1 c\theta_1 + r_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & r_1 s\theta_1 + r_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Cinemática direta (3/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

De esta forma é possível descrever as rotações e translações de um elo do sistema com respeito ao elo anterior. A extensão a 3D é imediata (acrescentado uma linha e uma coluna). Por exemplo:

Rotação ao redor do eixo *x:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação paralela ao eixo *z:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática direta (4/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

Em 2D:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & r_1 c\theta_1 + r_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & r_1 s\theta_1 + r_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O equivalente em 3D:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_1 c\theta_1 + r_2 c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_1 s\theta_1 + r_2 s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática direta (5/5)

Representação de Denavit-Hartenberg (D-H):

Utilizando matrizes de transformação homogênea:

- Cada elo do sistema tem associado um sistema de referência
- É possível representar as translações e rotações *relativas* entre vários elos (ou entre todos)
- A matriz ${}^{i-1}A_i$ representa a posição e orientação relativa entre os sistemas associados a dois elos sucessivos

A representação total do sistema que serve de exemplo:

$${}^{0}A_2 = {}^{0}A_1 \, {}^{1}A_2$$

Esta abordagem é sistemática

Cinemática inversa (1/9)

A ***cinemática inversa*** procura determinar os valores das coordenadas articulares se conhecida a localização do extremo do membro.

Assim como no caso da cinemática direta, pode-se aplicar métodos geométricos:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \mathrm{atan2}(y, x), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para casos mais complexos, resulta muito difícil aplicar este método.

Cinemática inversa (2/9)

Da cinemática direta temos:

$$\vec{X} = \vec{f}(q) = T(q)\vec{x}$$

onde q é o vetor das coordenadas articulares:

$$q = (r_1, \theta_1, \ldots, r_n, \theta_n)$$

O problema da cinemática inversa consiste em encontrar a “inversa” da $\vec{f}$ tal que

$$q = \vec{f}^{\,-1}(\vec{X})$$

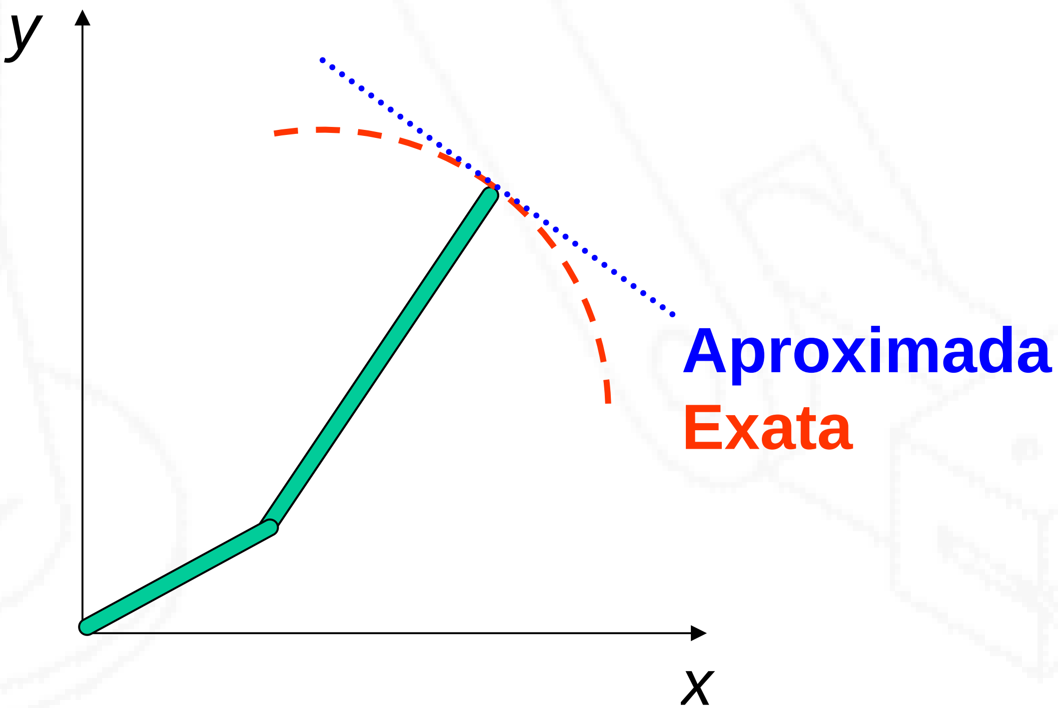
Devido aos senos & cosenos das rotações, $\vec{f}$ é não linear em q. Por isso, sua inversa pode não existir ou não ser uma função elementar (arctan, cos,…).

Cinemática inversa (3/9)

A idéia é utilizar uma ***aproximação linear da função*** e achar sua "inversa":

$$\vec{f}(q) = \vec{f}(q_0) + J(q_0)(q - q_0) \qquad \text{(Taylor)}$$

onde $J(q_0)$ é o ***jacobiano*** da função no ponto q_0 e a aproximação anterior é válida perto desse ponto.



Cinemática inversa (4/9)

Cálculo do jacobiano:

Precisamos calcular o jacobiano e logo "invertê-lo". As colunas do jacobiano são as derivadas parciais de $\vec{f}$ no ponto q_0. Como da representação de D-H temos

$$\vec{f}(q) = R_1 T_1 \cdots R_n T_n \vec{x}$$

onde só R_i depende de θ_i e só T_i depende de r_i, pela regra do produto as derivadas parciais são calculadas como sendo:

$$\partial_{\theta_i} \vec{f}(q) = R_1 T_1 \cdots R_i' T_i \cdots R_n T_n \vec{x},$$

$$\partial_{r_i} \vec{f}(q) = R_1 T_1 \cdots R_i T_i' \cdots R_n T_n \vec{x}.$$

Por isso é necessário derivar matrizes de rotação e translação.

Cinemática inversa (5/9)

Cálculo do jacobiano:

Derivada de uma matriz de rotação R:

$$RR^T = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad R'R^T + R(R')^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad R'R^T = -(R'R^T)^T$$

Então a ***velocidade angular*** $\Omega = R'R^T$ é uma matriz antissimétrica, que está relacionada com o eixo de rotação

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

via

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & 0 \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, $R' = R'R^T R = \Omega R$.

Cinemática inversa (6/9)

Cálculo do jacobiano:

Derivada de uma matriz de translação T:

Por exemplo:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cinemática inversa (7/9)

Cálculo do jacobiano:

Retomando nosso exemplo, se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então o jacobiano resulta ser:

$$J = \left[\begin{array}{c:c:c:c} c\theta_1 & -r_2\,s(\theta_1+\theta_2) - r_1\,s\theta_1 & c(\theta_1+\theta_2) & -r_2\,s(\theta_1+\theta_2) \\ s\theta_1 & r_2\,c(\theta_1+\theta_2) + r_1\,c\theta_1 & s(\theta_1+\theta_2) & r_2\,c(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O vetor das coordenadas articulares é

$$q = (r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$$

Cinemática inversa (8/9)

Inversa generalizada:

A inversa do jacobiano é tal que, dada uma pequena variação da posição do extremo, é possível calcular a variação nas coordenadas articulares:

$$\Delta q = J^{-1}\,\Delta x$$

Em geral, ***não*** existe a inversa do jacobiano, mas sim uma ***inversa generalizada*** *B*, que cumpre alguma das ***condições de Moore-Penrose***:

$$1.\; JBJ = J \qquad 2.\; BJB = B$$

$$3.\; (JB)^T = JB \qquad 4.\; (BJ)^T = BJ$$

Se *B* cumpre todas as quatro condições, é dita ***pseudo-inversa***, e é única: $B = J^{+}$

Achar a inversa generalizada é um processo lento e que não lida adequadamente com singularidades.

Cinemática inversa (9/9)

Transposta do jacobiano:

Em lugar de utilizar a pseudo-inversa do jacobiano, pode-se utilizar a transposta:

$$\Delta q = J^T \, \Delta x$$

É muito mais barato e ainda por cima evita problemas com singularidades.

Esta aproximação é motivada por considerações físicas (“trabalho virtual”).

Para resolver certos problemas de escala, pode-se introduzir um fator de escala *h*, e iterar até atingir a convergência:

$$\Delta q^{(i+1)} = h\, J^T \, \Delta x^{(i)}$$

Referências

Cinemática Inversa:

•*Fast Numerical Methods for Inverse Kinematics*, Bill Baxter
•*Cinemática del robot*, Amador

Matrizes em geral:

•*Matrix Computations*, Gene H. Golub & Charles F. Van Loan