universidade de aveiro

Mestrado em Engenharia Mecânica

Sistemas de Manipulação e Locomoção

Caṕ tulo 2

Fundamentos de Cinemática

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro (2001/2002)

Índice

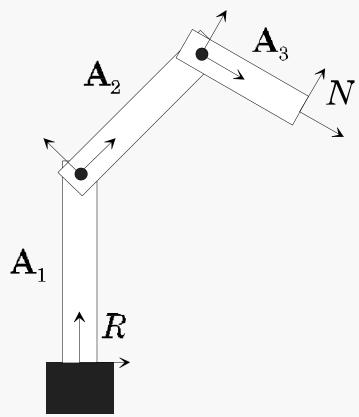
- Cinemática de manipuladores
- Espaço das juntas e espaço cartesiano
- Parâmetros de juntas e elos
- Algoritmo de Denavit-Hartenberg
- Cinemática directa: relações diferenciais e o operador Jacobiano
- Cinemática inversa: o problema das redundâncias e singularidades
- Estudo do manipulador RR
- Planeamento de trajectórias
- Movimento ponto-a-ponto *vs*. movimento contínuo

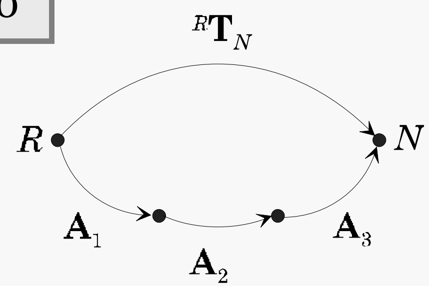
Introdução

Cinemática de Manipuladores Série

- **A cinemática de um manipulador é o estudo do conjunto de relações entre posições, velocidades e aceleração dos elos**
  - A relação entre o referencial de origem e o referencial da extremidade do manipulador é dada por uma transformação ${}^{R}\mathbf{T}_{N}$

1. Atribuir referenciais a cada elo





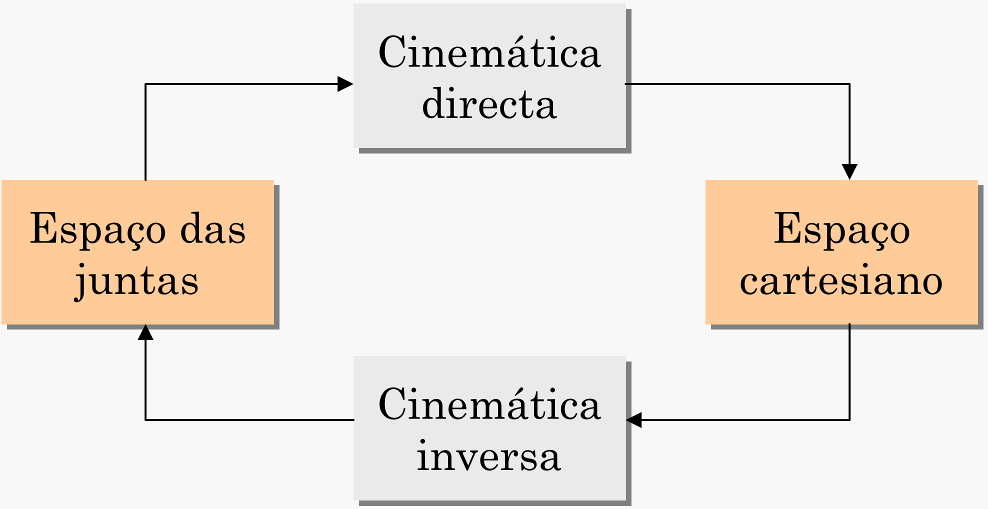
$${}^{R}\mathbf{T}_{N} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_n$$

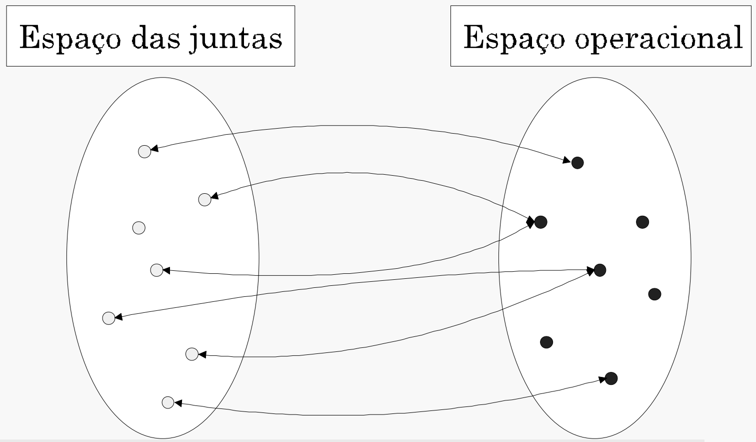
2. A relação entre elos é traduzida por uma matriz de transformação A_i

Introdução

Espaço das Juntas e Espaço Operacional

- **Podemos definir 2 espaços de variáveis: o espaço das juntas** ($dim = n$) **e o espaço cartesiano ou operacional** ($dim = 6$)
  - As operações do **espaço das juntas** para o **espaço operacional** não apresentam ambiguidade, mas o contrário nem sempre é verdade





☝ O espaço das juntas é muitas vezes redundantes !!!

Introdução

Algoritmo de Cinemática Directa

- **Implementar a cinemática directa de um braço manipulador significa determinar as relações que exprimem:**
  - Um ponto no espaço Cartesiano, em função de ...
  - Um ponto no espaço das juntas,

$$\vec{\mathbf{r}} = f(\vec{\mathbf{q}})$$

Algoritmo de Cinemática Directa

1. Colocar o robô na posição zero
2. Atribuir um sistema de coordenadas a cada elo
3. Descrever as relações entre as variáveis das juntas e dos elos
4. Determinar as matrizes de transformação $\mathbf{A}_i$ dos diversos elos
5. Multiplicar os $\mathbf{A}_i$ e obter a expressão ${}^{R}\mathbf{T}_{H}$
6. Obter as coordenadas de **posição** e **orientação** da mão

Introdução

Parâmetros de Juntas e Elos

Associação série !!

- **Para atribuir sistema de coordenadas a um elo é preciso levar em conta a sua geometria e os efeitos que terá no elo seguinte**
  - No intuito de obter uma forma coerente e prática de determinação desses sistemas de coordenadas, é necessário definir conceitos, tais como:

→ **Eixo** de uma junta

→ **Parâmetros cinemáticos** dos elos e juntas associadas

Parâmetros de Juntas e Elos

Eixo da Junta

- **O eixo de uma junta é o eixo relacionado com a simetria do movimento inerente à própria junta**
  - Pode coincidir com o eixo de um ou outro elo ou mesmo ser-lhe ortogonal
  - O eixo de uma junta fará parte do sistema de coordenadas associado ao elo

☝ O eixo da junta será por convenção o eixo das coordenadas *zz*

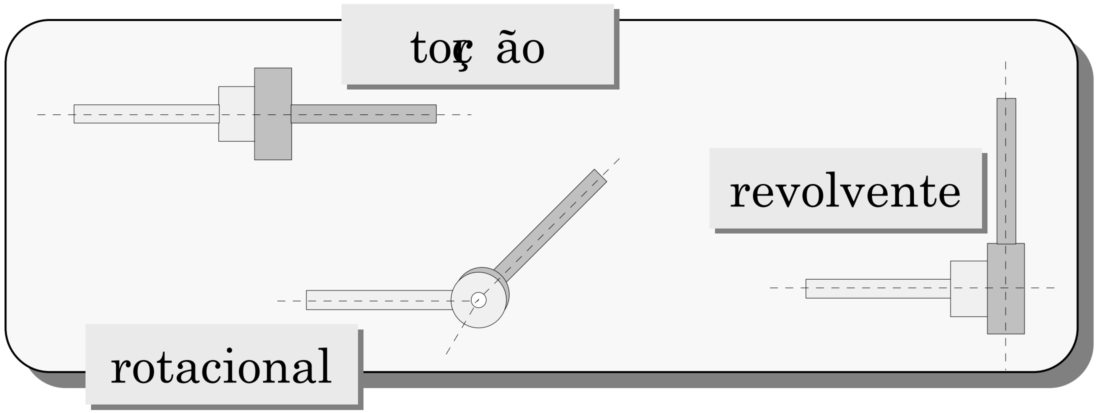
Parâmetros de Juntas e Elos
Eixo da Junta

- **Eixo de junta rotacional**
  - No caso de termos dois elos **colineares**, então o eixo da junta coincide com o eixo longitudinal dos elos

    Usado nos "punhos"

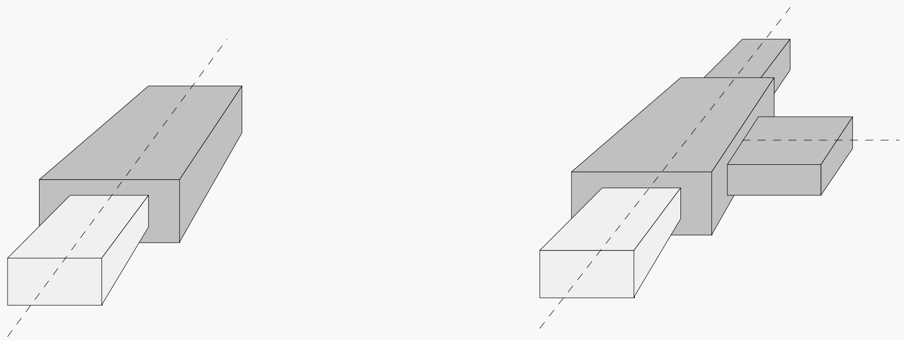
  - No caso dos elos terem o eixo de rotação perpendicular ao seu eixo longitudinal, então o eixo da junta é **ortogonal**

    Comum nos cotovelos



Parâmetros de Juntas e Elos
Eixo da Junta

- **Eixo de junta prismática**



Eixo de junta colinear e ortogonal em juntas prismáticas

Parâmetros de Juntas e Elos
Parâmetros Cinemáticos

- **Um elo mecânico é um elemento rígido que mantém fixas as relações entre juntas sucessivas**
  - Pode ser caracterizado por um determinado número de parâmetros geométricos (cinemáticos) no que diz respeitoà transformação que opera
  - Para se compreender algumas definições posteriores recorre-se a uma simbologia própria, a saber:

O_i	Ponto de origem do sistema de coordenadas
$z_i \cap x_i$	Ponto de intersecção entre o eixo z_i e o eixo x_i
$\overline{O_i, P_i}_{\mid x_i}$	Distância do ponto O_i ao ponto P_i medido ao longo do eixo x_i
$\angle(x_i, z_i)_{\mid y_i}$	Ângulo medido da direcção de x_i para z_i em torno do eixo y_i

Parâmetros de Juntas e Elos
Parâmetros Cinemáticos

- **Comprimento do elo (l_i)** $$l_i = \overline{O_i, (z_{i-1} \cap x_i)}_{|x_i}$$
  – Distância medida ao longo da normal comum entre os eixos das juntas
- **Deslocamento de juntas(d_i)** $$d_i = \overline{O_{i-1}, (z_{i-1} \cap x_i)}_{|z_{i-1}}$$
  – Distância entre elos medida ao longo do eixo da junta anterior
- **Ângulo de junta (θ_i)** $$\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i)_{|z_{i-1}}$$
  – Ângulo definido entre o eixo de um elo e o eixo do elo seguinte
- **Ângulo de torção do elo (α_i)** $$\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i)_{|x_i}$$
  – Ângulo que o elo impõe desde o eixo da junta anterior até ao da seguinte

☝ O elo n e a junta$n$ são responsáveis pela definição do sistema de coordenadas n solidário com o elo

Parâmetros Cinemáticos
Variável de Junta

Parâmetro	Símbolo	Junta rotacional	Junta prismática	Definição formal
Ângulo de junta	θ_i	**Variável**	Fixo	$\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i)_{\vert z_{i-1}}$
Deslocamento de junta	d_i	Fixo	**Variável**	$d_i = \overline{O_{i-1}, (z_{i-1} \cap x_i)}_{\vert z_{i-1}}$
Comprimento do elo	l_i (a_i)	Fixo	Fixo	$l_i = \overline{O_i, (z_{i-1} \cap x_i)}_{\vert x_i}$
Ângulo de torção do elo	α_i	Fixo	Fixo	$\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i)_{\vert x_i}$

Vector variáveis de junta → $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T, q_i = \begin{cases} \theta_i & \Leftarrow rotacional \\ d_i & \Leftarrow prismática \end{cases}$

Transformação Associada a um Elo

- **Pode concluir-se que o elo *i*, associado à junta *i*, realiza uma transformação geométrica dando origem ao referencial *i*+1**

A transformação geométrica é decomposta nas 4 operações elementares:

→ Rotação θ_i em torno do eixo da junta (z_{i-1})

"longitudinal"

→ Translação ao longo do eixo do elo (x_i) do seu próprio comprimento (l_i)

→ Translação ao longo do eixo da junta (z_i) do afastamento entre juntas (d_i)

→ Rotação α_i do eixo da junta (z_i) em torno do eixo longitudinal do elo (x_i)

"transversal"

Transformação Associada a um Elo

- **Dada a sequência e ordem destas transformações, obtém-se a transformação final A_i por pós-multiplicação sucessiva**

$$A_i = Rot_z(\theta_i)\cdot Trans(l_i,0,0)\cdot Trans(0,0,d_i)\cdot Rot_x(\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & l_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & l_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_i \equiv {}^{i\text{-}1}A_i}$$

Elos numerados a partir da base:
– A base fixa é o **elo 0**
– O primeiro elo móvel é o **elo 1**

Cinemática Directa
Algoritmo de Denavit-Hartenberg

- **Algoritmo de Denavit-Hartenberg**
  - Implementa uma **metodologia sistemática** para obter os sistemas de coordenadas e as transformações associadas a cada elo
  - Para ser aplicada as juntas têm de estar numeradas por ordem crescente, começando pela base do manipulador
  - Para um manipulador com n juntas definem-se n+1 sistemas de coordenadas, sendo o último associado à mão ou garra

Algoritmo de Denavit-Hartenberg
Sistemas de Coordenadas

- **Sistema de coordenadas da base O_0**
  - z_0 alinhado com o eixo da junta 1
  - x_0 e y_0 formam um sistema directo
- **Sistema de coordenadas intermédios O_i**
  - z_i alinhado com o eixo da junta i+1
  - O_i é a intersecção de z_i com z_{i-1} **ou** da normal comum entre z_i e z_{i-1} com z_i
  - x_i com o sentido de $\pm(z_{i-1} \times z_i)$ **ou** ao longo da normal comum a z_{i-1} e z_i
- **Sistema de coordenadas da mão O_n (o último)**
  - O_n é o ponto extremo do manipulador
  - z_n colinear com z_{n-1} e a apontar para "fora" ; x_n é normal a z_n e z_{n-1}

Algoritmo de Denavit-Hartenberg
Parâmetros das Juntas

$d_i = \overline{O_{i-1},(z_{i-1} \cap x_i)}_{\mid z_{i-1}}$	É a variável de junta se for prismática
$l_i = \overline{O_i,(z_{i-1} \cap x_i)}_{\mid x_i}$	
$\theta_i = \angle(x_{i-1}, x_i)_{\mid z_{i-1}}$	É a variável de junta se for rotacional
$\alpha_i = \angle(z_{i-1}, z_i)_{\mid x_i}$	

$$A_i = Rot_z(\theta_i)\cdot Trans(l_i,0,0)\cdot Trans(0,0,d_i)\cdot Rot_x(\alpha_i)$$

Cinemática Directa
Relações Diferenciais

- **A cinemática directa estabelece a relação vectorial entre dois grupos de variáveis: espaço das juntas e espaço operacional**

$$\vec{\mathbf{r}} = f(\vec{\mathbf{q}})$$

Se $\vec{\mathbf{r}} = [x \;\; y \;\; z \;\; \phi \;\; \theta \;\; \psi]^T$ indica a postura da extremidade do manipulador, então é imperativo pensar nas seguintes questões:

1) Que resulta ao derivar as expressões anteriores em ordem ao tempo?

2) Como se relacionam com elas as velocidades/acelerações das juntas?

$\dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \Rightarrow$ indicará as componentes cinéticas dessa mesma extremidade

Cinemática Directa
Relações Diferenciais

- **A resposta à segunda questão está num resultado da análise vectorial referente à diferenciação de funções vectoriais**

$$d\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \cdot d\vec{\mathbf{q}}$$

– $\mathbf{J}$ é designado o Jacobiano da função vectorial f

– Assumindo m variáveis cartesianas e n juntas, ou de modo equivalente:

$$(r_1, r_2, \cdots, r_m) = f(q_1, q_2, \cdots, q_n)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & \frac{\partial r_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

☝ Extensão das derivadas de funções escalares para o caso de vectores

Cinemática Directa
Relações Diferenciais

- **Assim, pode-se obter analiticamente a relação entre as variáveis no espaço cartesiano em função do espaço das juntas**

$$r = f(q)$$

$$\dot{r} = J(q)\dot{q}$$

$$\ddot{r} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

☞ A função *f* é uma transformação <u>não linear</u> que depende dos parâmetros do robô e conduz sempre a uma solução

☞ As relações diferenciais são expressas com o auxílio da <u>matriz do Jacobiano</u>

Cinemática Inversa

- **A cinemática inversa determina os valores das juntas que se adequam a uma dada configuração no espaço operacional**

☝ Não será grave porque as soluções de interesse prático estão já todas bem estudadas !!!

☞ A cinemática inversa nem sempre é um problema com solução analítica, ou por vezes não tem mesmo solução !!!

☞ Mais complexo ainda é o facto de não haver uma metodologia única de aplicação directa

Existem <u>métodos alternativos</u> dos quais se destacam:
– Transformações inversas (Paul *et al.*, 1981)
– Matrizes duais (Denavit, 1956)
– Métodos iterativos (Vicker *et al.*, 1964)
– Abordagens geométricas (Lee &Ziegler , 1984)

Cinemática Inversa

- **As equações de cinemática inversa serão obtidas invertendo as relações anteriores**

$$q = f^{-1}(r)$$

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{r}$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{r} + \dot{J}^{-1}(q)\dot{r}$$

$$= J^{-1}(q)\left[\ddot{r} + \dot{J}(q)\dot{r}\right]$$

☝ Como seleccionar a solução óptima?

CONCEITOS

- Número de redundâncias
- Degeneração
- Infinitamente redundante

– A função f^{-1} é uma transformação que pode ter ou não solução e, no caso afirmativo, pode existir uma, várias ou uma infinidade de soluções

– As relações diferenciais são, também, mais complexas podendo ocorrer configurações em que a matriz do Jacobiano é singular

Cinemática Inversa
Singularidades

- **Existem configurações particulares do manipulador para as quais a matriz $J(q)$ é singular, isto é:**

$$\boxed{\det[J(q)] = 0}$$

☞ O robô perde um ou mais g.d.l. implicando, em termos práticos, que não são possíveis movimentos nas chamadas direcções singulares

☞ Trajectórias que passem próximo das singularidades são difíceis de realizar pois dão origem a velocidades angulares fisicamente irrealizáveis

☟ As singularidades são difíceis de eliminar, seja ao nível do projecto mecânico como ao nível do planeamento de trajectórias

Cinemática Inversa
Jacobiano Inverso

- **Como se pode obter o Jacobiano inverso ?**

1) Diferenciar as expressões da cinemática inversa, o que é sempre válido se essas expressões existirem

2) Se o Jacobiano directo for quadrado então pode tentar-se a sua inversão quer analítica quer numérica

3) Nos casos em que o Jacobiano não é quadrado, logo sem possibilidade de definir a sua inversa, pode recorrer-se ao conceito de pseudo-inversa

$$A^{+} = \begin{cases} A^t\left(AA^t\right)^{-1} & \Leftarrow m \le n \\ A^{-1} & \Leftarrow m = n \\ \left(A^t A\right)^{-1} A^t & \Leftarrow m \ge n \end{cases}$$

Cinemática Inversa
Matriz Pseudo-Inversa

- **Na equação A · x = b, a solução x = A^+·b minimiza o valor de:**

$$\left\| A \cdot x - b \right\|$$

$\Rightarrow$ A·A^+ representa o valor mais próximo possível da matriz identidade

A solução da cinemática inversa diferencial resulta da expressão geral

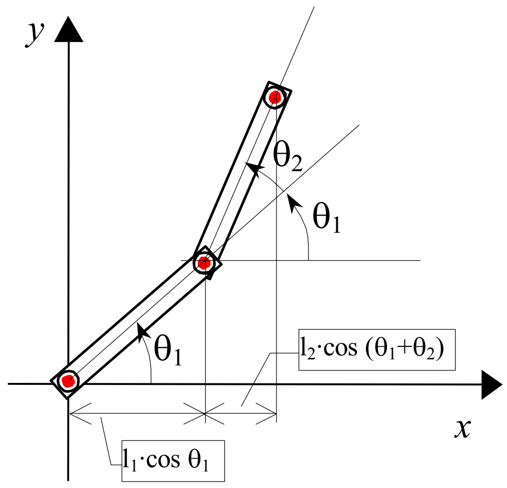
$$\dot{q} = J^+(q)\dot{r} + \left(I - J^+ J\right)K_c$$

Manipulador Planar RR
Cinemática Directa

- **A transformação de cinemática directa pode ser obtida de forma geométrica f: $[\theta_1,\theta_2]^T \rightarrow [x_e,y_e]^T$**

$$r = f(q) \Rightarrow \begin{cases} x_e = l_1 \cdot \cos(\theta_1) + l_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_e = l_1 \cdot \sin(\theta_1) + l_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

☝ A qual tem sempre uma, e uma só, solução !!!



Manipulador Planar RR
Cinemática Directa

- **As expressões anteriores conduzem às seguintes relações diferenciais:**

$$\dot{r} = J(q)\dot{q} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1S_1 - l_2S_{12} & -l_2S_{12} \\ l_1C_1 + l_2C_{12} & l_2C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$J(q)$ é o Jacobiano da equação $r = f(q)$

$$\ddot{r} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1S_1 & -l_2S_{12} \\ l_1C_1 & l_2C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1C_1 & l_2C_{12} \\ l_1S_1 & l_2S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1{}^2 \\ \dot{\theta}_{12}{}^2 \end{bmatrix}$$

Manipulador Planar RR

Cinemática Inversa

- **A transformação inversa** f^{-1}: $[x_e, y_e]^T \rightarrow [\theta_1, \theta_2]^T$

$$q = f^{-1}(r) \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 : k_1 = 2l_1 y_e, k_2 = 2l_1 x_e, k_3 = x_e^2 + y_e^2 + l_1^2 - l_2^2 \\ \theta_2 : k_1 = 0, k_2 = 2l_1 l_2, k_3 = x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2 \\ \theta_i = a\tan 2(k_1, k_2) \pm a\tan 2\left(\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}, k_3\right) \end{cases}$$

  – Só tem uma solução geometricamente possível quando $[x_e, y_e]^T$ se encontra na área de trabalho definida pela expressão:

$$(l_1 - l_2)^2 \le x_e^2 + y_e^2 \le (l_1 + l_2)^2$$

Em geral, existem duas soluções

$\Rightarrow$ "**cotovelo para cima**"
$\Rightarrow$ "**cotovelo para baixo**"

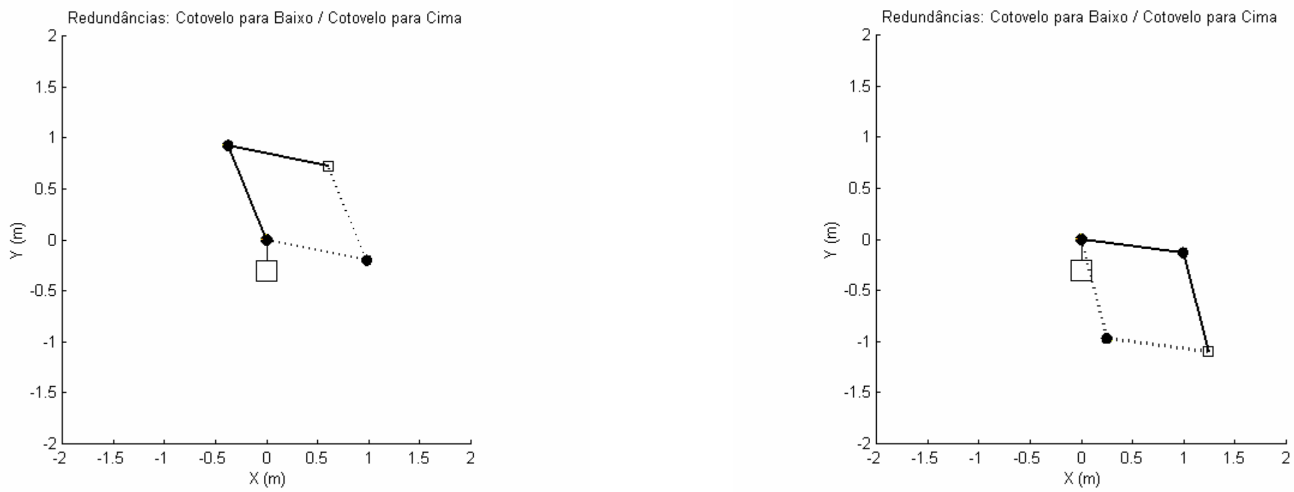
Se $l_1 = l_2$ e $(x_e, y_e) = (0,0)$

$\Rightarrow$ infinidade de soluções

Manipulador Planar RR
Redundâncias

- **As redundâncias traduzem a existência de várias configurações angulares que permitem alcançar a mesma posição e orientação do elemento terminal**

REDUNDÂNCIAS DO MANIPULADOR RR



Manipulador Planar RR
Cinemática Inversa

- **As equações de cinemática inversa para as velocidades e acelerações são dadas por:**

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \cdot \dot{r} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 - l_2 C_{12} & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{r} + \dot{J}^{-1}(q)\dot{r} \Rightarrow$$

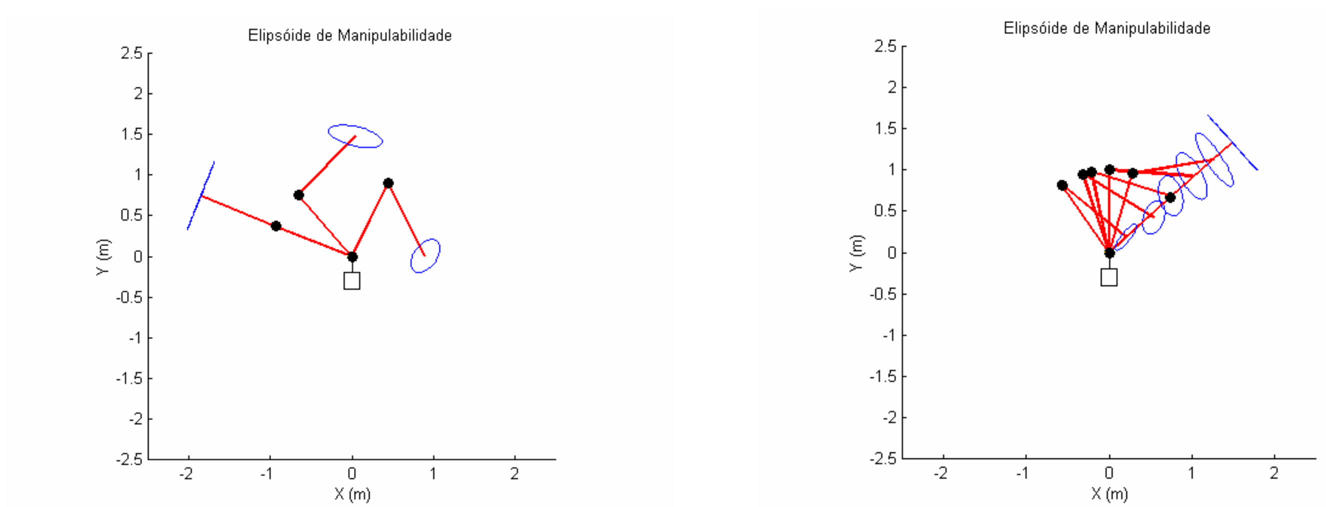
$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 & -l_1 S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \end{bmatrix} + \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_1 l_2 C_2 & l_2^{\,2} \\ -l_1^{\,2} & -l_1 l_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^{\,2} \\ \dot{\theta}_{12}^{\,2} \end{bmatrix}$$

  - Estas equações revelam que existem <u>singularidades</u> quando $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = \pi$, isto é, quando $[x_e, y_e]^T$ está sobre a fronteira que delimita a área de trabalho
  - Por outras palavras, solicitações finitas de velocidade (aceleração) no elemento terminal requerem valores nas juntas que tendem para infinito

Manipulabilidade Cinemática

- **Vários factores devem ser considerados na escolha da melhor postura do robô dentro do espaço de trabalho**
  - A manipulabilidade é uma medida (cinemática) da capacidade do robô para se mover em qualquer direcção do espaço de trabalho.

MANIPULABILIDADE DO ROBÔ RR



Planeamento de Trajectórias

- **Depois de saber como relacionar o espaço das juntas com o espaço operacional, é necessário proceder ao que se chama**

PLANEAMENTO DE TRAJECTÓRIAS

Definir a forma de variação dos diversos actuadores de forma a fazer o manipulador cumprir os objectivos de movimentação esperado (planeado)

Num robô industrial, estes objectivos podem ser:

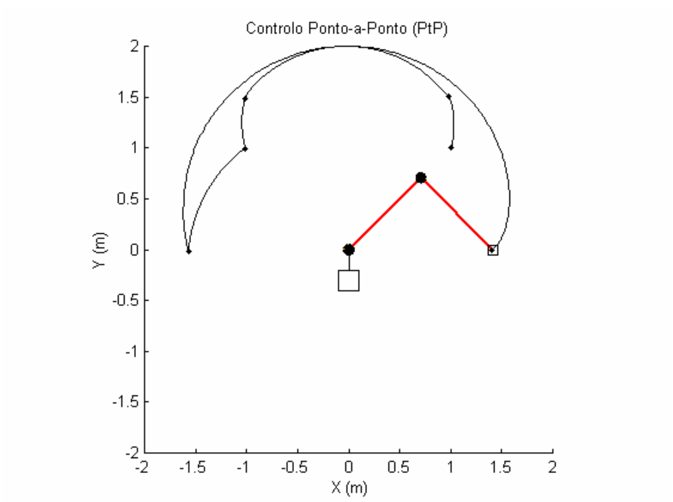
1) O deslocamento do elemento terminal entre dois pontos em repouso no espaço de trabalho, durante um dado intervalo de tempo

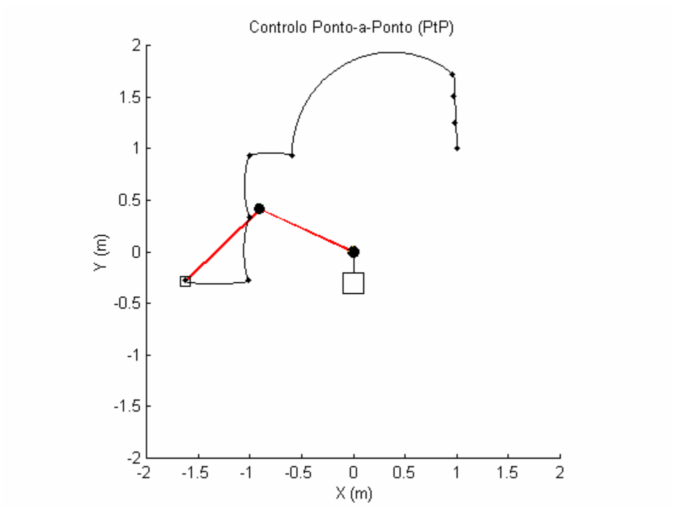
2) A execução de uma trajectória bem definida do elemento terminal no espaço operacional obedecendo a critérios temporais precisos

Planeamento de Trajectórias
Movimento Ponto-a-Ponto

- **O movimento discreto entre dois pontos no espaço Cartesiano exige um planeamento de trajectórias no espaço das juntas**
  - Em consequência, não há controlo sobre a trajectória percorrida pelo elemento terminal entre quaisquer dois pontos

MOVIMENTO PONTO-A-PONTO

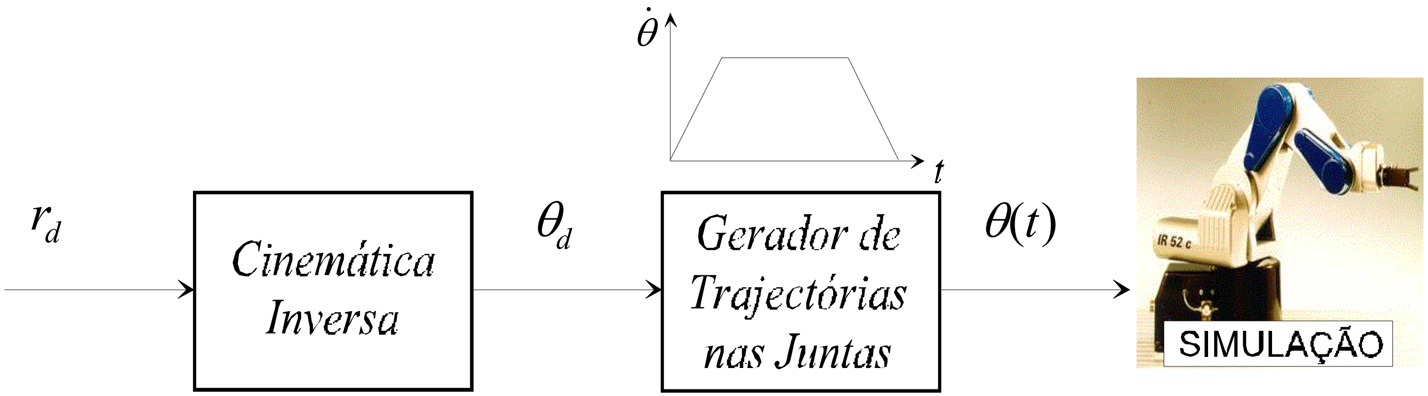




Planeamento de Trajectórias
Movimento Ponto-a-Ponto

- <u>Controlo em posição</u>: **planeamento do movimento nas juntas**

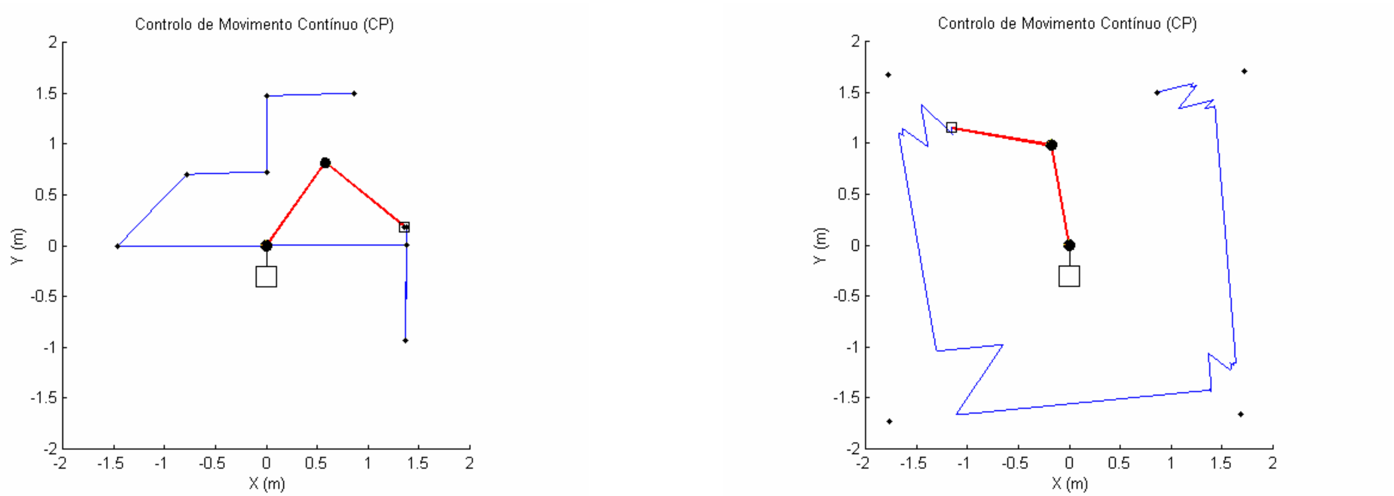
ALGORITMO DO CONTROLO EM POSIÇÃO



Planeamento de Trajectórias
Movimento Contínuo

- **No movimento contínuo o planeamento de trajectórias é efectuado no espaço Cartesiano (*e.g.*, linha recta, circular)**
  - As trajectórias próximas de <u>singularidades</u> são difíceis de efectuar, dando origem a velocidades nas juntas fisicamente irrealizáveis

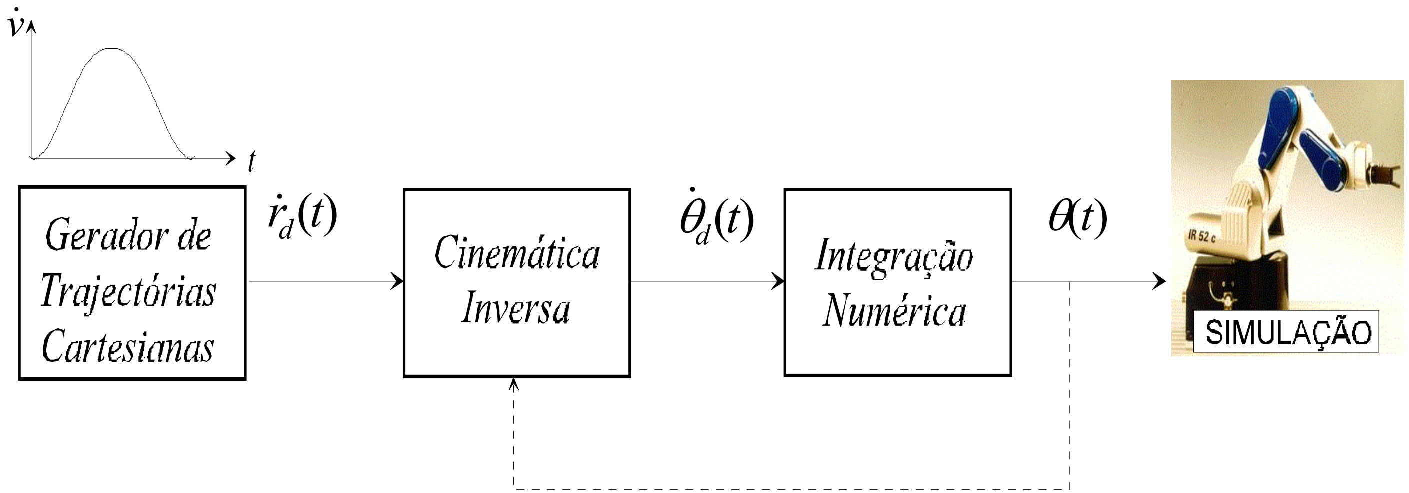
MOVIMENTO CONTÍNUO



Planeamento de Trajectórias
Movimento Contínuo

- **<u>Controlo em velocidade</u>: planeamento no espaço Cartesiano**

ALGORITMO DO CONTROLO EM VELOCIDADE



Planeamento de Trajectórias

Caminho *vs*. Trajectória

- **Esta discussão leva ao estabelecimento de duas definições importantes: CAMINHO e TRAJECTÓRIA**
  - Por **CAMINHO** entende-se um conjunto de pontos no espaço (operacional ou das juntas) que deve ser percorrido numa dada ordem
  - Uma **TRAJECTÓRIA** define um caminho levando em conta constrangimentos temporais

☝ A trajectória define a evolução ao longo de uma caminho em função do tempo !!!

Planeamento de Trajectórias
Constrangimentos Espaciais *vs*. Temporais

- **Nas abordagens de planeamento de trajectórias deve atende-se à natureza do constragimento**

Constragimento Espacial

– Dar prioridade ao caminho a executar pelo elemento terminal ditado pelo conhecimento de obstáculos ou pela necessidade de percursos obrigatórios

Constrangimento Temporal

– Dar prioridade à dinâmica do movimento do manipulador em particular na continuidade e suavidade nas velocidades e acelerações nas juntas

☝ Evitar solicitações desmesuradas e irregulares nos respectivos actuadores !!!

Planeamento de Trajectórias
Espaço das Juntas

- **Planear uma trajectória no espaço das juntas significa obter a evolução de cada junta ao longo do tempo**
  - ☞ De tal forma que são verificadas determinadas condições cinemáticas nas juntas: posição, velocidade e aceleração no ponto inicial e no ponto final

Um movimento deve decorrer desde o instante t_0 até ao instante t_f

– Partindo do valor inicial θ_0 da junta até ao valor final θ_f

– Com uma velocidade inicial e uma velocidade final

– Mais ainda, pode desejar-se uma aceleração inicial e final

Planeamento de Trajectórias
Espaço das Juntas

- **No caso mais simples tem-se uma posição de partida e outra de chagada, e as velocidades inicial e final iguais a zero**

  ☞ Pretende-se que a velocidade angular seja <u>contínua</u> para evitar acelerações teoricamente infinitas e portanto esforços gravosos para os equipamentos

⇓

⇒ Pretende-se que a equação $\dot{\theta}(t) = 0$ tenha duas raízes para $t = t_0$ e $t = t_f$ e seja uma função contínua

☝ Muitas classes de funções garantem estas condições, mas a mais simples seja considerar uma <u>polinomial</u> em t

Planeamento de Trajectórias
Espaço das Juntas

- **Assim, pelo facto de ter duas raízes a expressão da velocidade da junta será uma polinomial de 2ª ordem**

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$
$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$
$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

$\Rightarrow$ Com base no conjunto de condições a verificar, pode-se obter a seguinte polinomial para a evolução das juntas

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{3}{t_f^2}\left(\theta_f - \theta_0\right)t^2 - \frac{2}{t_f^3}\left(\theta_f - \theta_0\right)t^3$$