Mestrado em Engenharia Mecânica

Sistemas de Manipulação e Locomoção

Capítulo 3

Modelização dinâmica de sistemas robóticos

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro (2001/2002)

Índice

Introdução

- **O primeiro passo em qualquer projecto de controlo é a obtenção do modelo preciso do sistema a controlar:**
  – Características dos actuadores
  – Parâmetros cinemáticos (comprimento dos elos mecânicos, alinhamento dos eixos)
  – Parâmetros dinâmicos (massa, localização do centro de massa, momentos de inércia)

O Problema da Dinâmica

- **O** **modelo dinâmico** **genérico de um sistema robótico rígido com *n* graus de liberdade actuados é dado por:**

$$t = H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) + B(\dot{q}) - J^T(q)\cdot f_{ext}$$

t é o vector coluna (*n*-dimensional) dos binários fornecidos pelos actuadores

***H*(*q*)** é a matriz quadrada (de ordem *n*) dos coeficientes inerciais (simétrica e definida positiva)

***C*(*q*,*dq*)** é o vector coluna (*n*-dimensional) das forças Coriolis/centrípetas

***G*(*q*)** é o vector coluna (*n*-dimensional) das forças gravitacionais

***B*(*dq*)** é o vector que descreve os efeitos de atrito no espaço das juntas

***J*(*q*)** é a matriz Jacobiana que relaciona as velocidades angulares no espaço das juntas com as velocidades lineares do elemento terminal do robô

f_{ext} é a força externa aplicada no elemento terminal (força de reacção)

O Problema da Dinâmica

- **As equações de movimento são uma descrição da relação entre os binários/forças nas juntas e o movimento do robô**
  - **Dinâmica inversa**: determina os binários necessários nas juntas para realizar um determiado movimento do robô (elos mecânicos)
    - Dimensionamento dos motores necessários em dada aplicação
  - **Dinâmica directa**: determina o movimento do robô como resultado da aplicação dos binários/forças aplicados nas juntas
    - Simulação dinâmica do sistema robótico

- **Um dos problemas da modelização decorre da dificuldade em modelizar com rigor propriedades significativas:**
  - Atritos
  - Flexibilidades
  - Impactos

O Problema da Dinâmica

- **O modelo matemático do sistema robótico é definido por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem obtidas a partir das leis físicas que o governam**

- **Existem duas aproximações básicas:**
  - **Formulação de Lagrange**: o comportamento dinâmico é descrito em termos de energia/trabalho usando coordenadas generalizadas (vector das juntas)
  - **Formulação de Newton-Euler**: interpretação da 2ª lei de Newton que descreve os sistemas dinâmicos em termos de forças e momentos que actuam nos elos individuais

Formulação de Lagrange

- **Uma aproximação para obter o modelo dinâmico do robô é usar a formulação de Lagrange (Lagrange-Euler):**
  - Modelo matemático de parâmetros concentrados (massas pontuais)
  - Baseada em conceitos de energia e trabalho

- **A equação de movimento é formulada em termos da função Lagrangiano L:**

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q)$$

- **A equação geral do movimento é expressa por:**

$$t_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q,\dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q,\dot{q}) \qquad 1 \le i \le n$$

Formulação de Newton-Euler

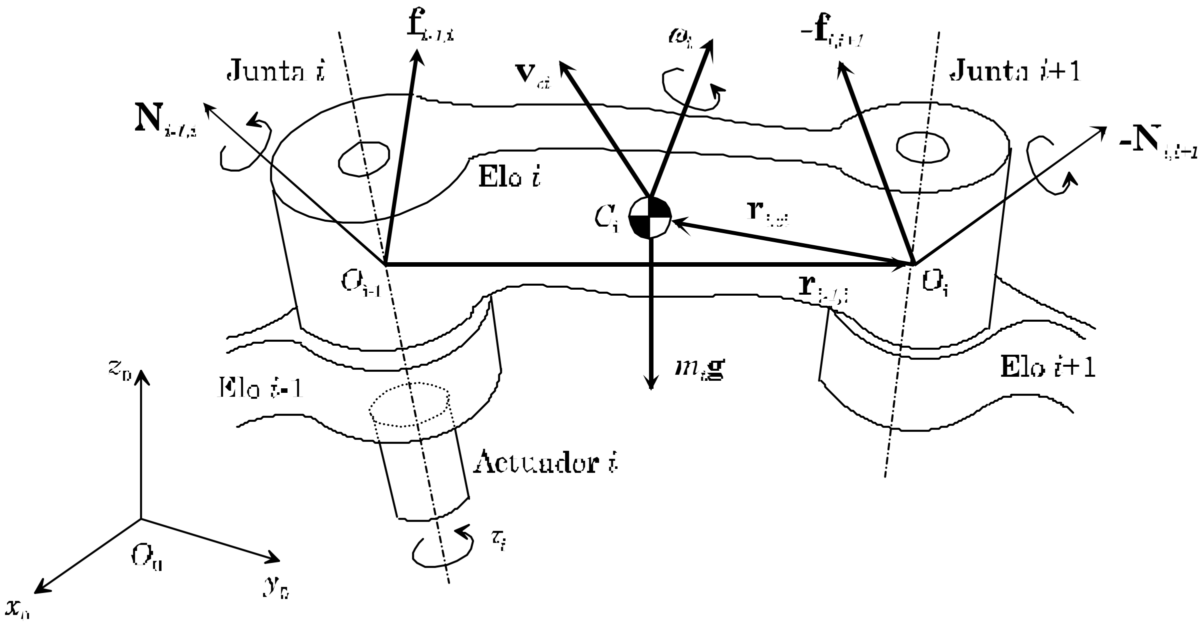
- **As equações de movimento são derivadas a partir de uma interpretação directa da segunda lei de Newton**

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \qquad \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{g}$$

  - As equações incorporam todas as forças e momentos que actuam nos elos mecânicos individuais, incluindo o acoplamento entre elos
  - Assim, as equações dinâmicas de um corpo rígido (elo mecânico) são representadas por duas equações:
    - A que descreve o movimento de translação do centróide (CM)
    - A que descreve o movimento de rotação em torno do centróide

Formulação de Newton-Euler

- **Considerando as forças e momentos que actuam sobre o elo *i***

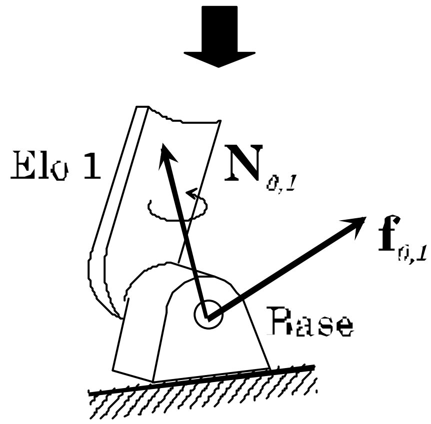


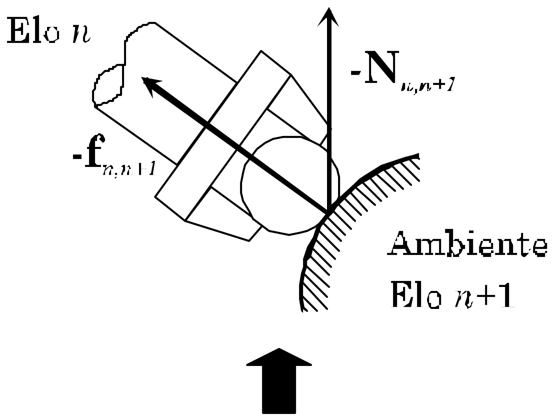
– ***Forças:*** $\vec{f}_{i-1,i} - \vec{f}_{i,i+1} + m_i\vec{g} - m_i\vec{a}_{ci} = 0$

– ***Momentos:*** $\vec{N}_{i-1,i} - \vec{N}_{i,i+1} + \vec{r}_{i,ci} \times \vec{f}_{i,i+1} - \vec{r}_{i-1,ci} \times \vec{f}_{i-1,i} - I_i\dot{w}_i - w_i \times \left(I_i w_i\right) = 0$

Formulação de Newton-Euler

- **Para *i* = 1 ➔ $-f_{0,1}$ e $-N_{0,1}$ são as forças e os momentos de reacção aplicados sobre a base**





- **Para *i* = *n* ➔ $f_{n,n+1}$ e $N_{n,n+1}$ são as forças e os momentos de reacção aplicados sobre o ambiente (visto como um elo adicional)**

Relação Binário/Força

- **A relação entre os binários exercidos pelos actuadores e a força resultante aplicada pelo elemento terminal é dada por:**

$$t = J^T F$$

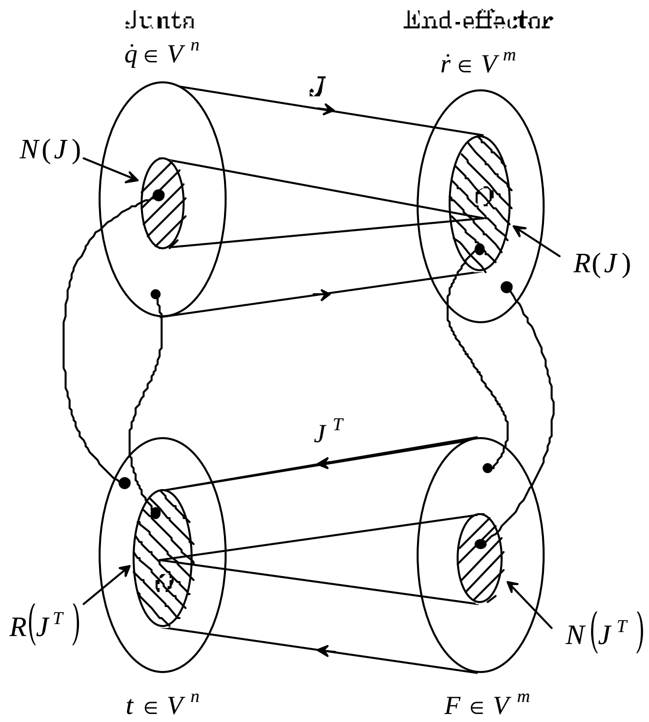
  - onde $\boldsymbol{J}$ é a matriz Jacobiano que relaciona o deslocamento infinitesimal nas juntas com o deslocamento infinitesimal do elemento terminal $d\mathbf{r} = \boldsymbol{J}d\mathbf{q}$
  - esta expressão para os binários pressupõem juntas sem atrito e não leva em conta os termos gravitacionais e outros

Binário equivalente nas juntas *t*
que corresponde
à força no elemento terminal *F*

Dualidade da Cinemática e Estática

- O espaço ***R(J)*** representa o conjunto de todas as velocidades do elemento terminal possíveis e geradas por velocidades das juntas (devido às configurações singulares este espaço não condiz com o espaço vectorial total V^m)
- Por outro lado, o espaço ***N(J)*** representa o conjunto das velocidades nas juntas que não produzem velocidade no elemento terminal

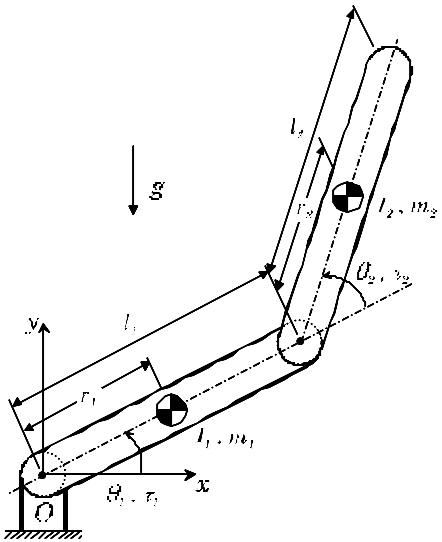
- O espaço ***N(JT)*** representa o conjunto das forças no elemento terminal que não requerem qualquer binário nas juntas (a "carga" é suportada pela estrutura do braço)
- Enquanto, o espaço ***R(J^T)*** representa o conjunto de todos os binários nas juntas possíveis e que permitem equilibrar as forças no elemento terminal

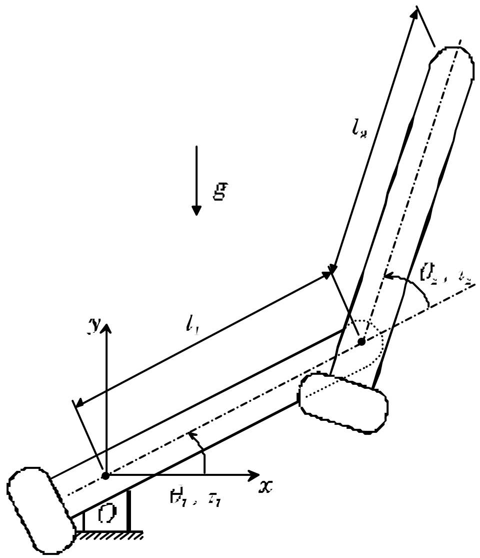


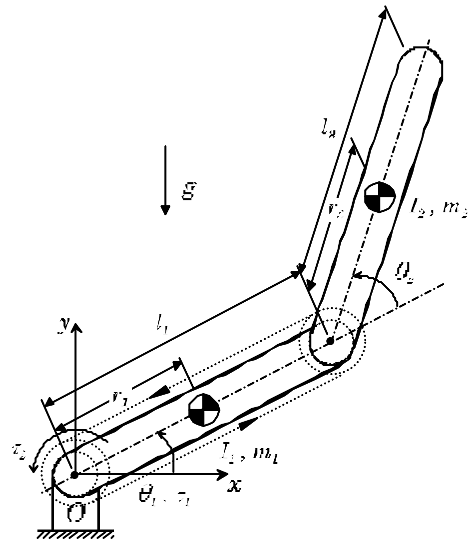
Manipulador Planar RR

Formas de Accionamento

Directo nas Juntas ◈ Compensação por Contrapesos ◈ Centralizado na Base







– Considera-se que cada robô é formado por elos mecânicos rígidos interligados por juntas ideais accionadas por actuadores ideiais

cadeia cinemática aberta

Manipulador Planar RR

Accionamento Directo nas Juntas

- **Equações da dinâmica inversa:**

$$t = H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

$$H(q) = \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + I_1 + m_2\left(l_1^2 + r_2^2 + 2l_1 r_2 C_2\right) + I_2 & m_2\left(r_2^2 + l_1 r_2 C_2\right) + I_2 \\ m_2\left(r_2^2 + l_1 r_2 C_2\right) + I_2 & m_2 r_2^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

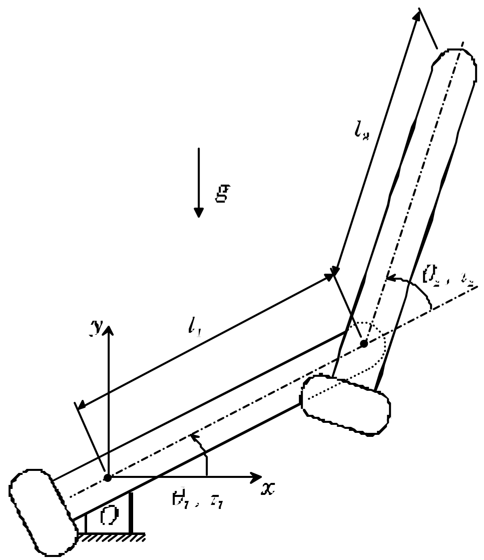
$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 r_2 S_2\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \\ m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \qquad G(q) = g\begin{bmatrix} \left(m_1 r_1 + m_2 l_1\right)C_1 + m_2 r_2 C_{12} \\ m_2 r_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

- Se $r_2 = 0$, $H(q)$ tem coeficientes constantes e os termos Coriolis/ centrípetos são eliminados; os termos gravitacionais são parcialmente compensados
- O cancelamento dos restantes termos gravitacionais requer uma compensação do primeiro elo

Manipulador Planar RR

Compensação por Contrapesos

- **O método de compensação mais usado consiste na integração de contrapesos**
  - A compensação dos dois elos depende da massa da carga e, portanto, é incompleta para cargas variáveis
  - A compensação aumenta as inércias m_i, J_i (i = 1,2)



Manipulador Planar RR
Accionamento Centralizado na Base

- **Equações da dinâmica inversa:**

$$t = H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

$$H(q) = \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + I_1 + m_2\left(l_1^2 + l_1 r_2 C_2\right) & m_2 l_1 r_2 C_2 \\ m_2\left(r_2^2 + l_1 r_2 C_2\right) + J_2 & m_2 r_2^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 r_2 S_2\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \\ m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \qquad G(q) = g\begin{bmatrix} \left(m_1 r_1 + m_2 l_1\right) C_1 \\ m_2 r_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

  - Assim, o motor passa a accionar a segunda junta através de uma cadeia de transmissão e não sobrecarrega o actuador do primeiro elo
  - Esta localização leva a que o binário de reacção se transmita à base, ao invés do caso anterior onde incidia sobre o primeiro elo
  - Conclui-se que há uma diminuição dos termos inerciais e gravitacionais, enquanto que a expressão para a compensação se mantém

Manipulador Planar RR

Interpretação Física dos Termos

- **As equações dinâmicas de um manipulador com *n*-gdl podem ser escritas na forma geral:**

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + G_i \qquad i = 1,\cdots,n$$

onde os coeficientes H_{ij}, h_{ijk} e G_i são funções dos deslocamentos das juntas $q_1,\ldots,q_n$ (angulares ou lineares)

- **Termos Gravitacionais, G_i**
  - Representam os momentos estáticos criados pelas massas m_1 e m_2 em torno dos seus eixos individuais
  - Os momentos dependem da configuração do braço: o efeito da gravidade é máximo quando o braço está totalmente estendido ao longo do eixo *x*

Manipulador Planar RR

Interpretação Física dos Termos

- **Termos Inerciais**
  - ***H*$_{\mathbf{ii}}$** representa o momento de inércia total visto pela junta *i* com as restantes imobilizadas (desprezando gravitacional)

$$\dot{q}_2 = \ddot{q}_2 = 0 \Rightarrow t_1 = H_{11}\ddot{q}_1 \quad \left(I = \sum m_i r_i^2 \right)$$

sistema discreto de partículas

    - A contribuição do segundo elo depende da configuração do braço, *i.e.*, da distância *L* entre o centróide do elo 2 e a junta 1 (ver Figura)

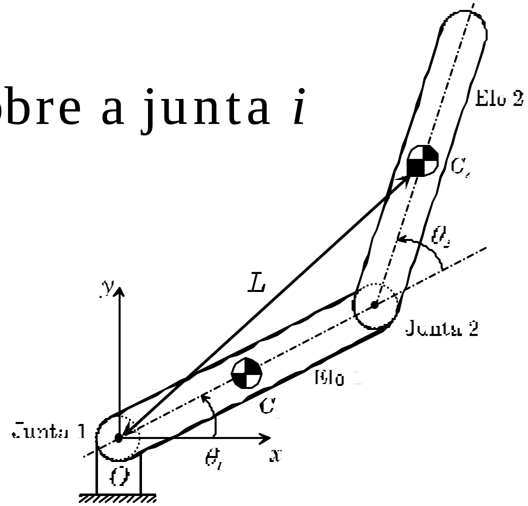
$$L = l_1^2 + r_2^2 + 2 l_1 r_2 C_2$$

  - ***H*$_{\mathbf{ij}}$** representa o efeito do movimento do elo *j* sobre a junta *i*

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow t_1 = H_{12}\ddot{q}_2$$

    - A força e o momento induzido pelo elo 2 geram:

$$\begin{aligned} t_{\text{int}} &= -N_{1,2} - r_{0,1} \times f_{1,2} \\ &= -I_2 \dot{w}_2 - r_{0,c2} \times m_2 \dot{v}_{c2} \\ &= -\left[I_2 + m_2 \left(r_2^2 + l_1 r_2 C_2 \right) \right] \ddot{q}_2 \end{aligned}$$



Manipulador Planar RR

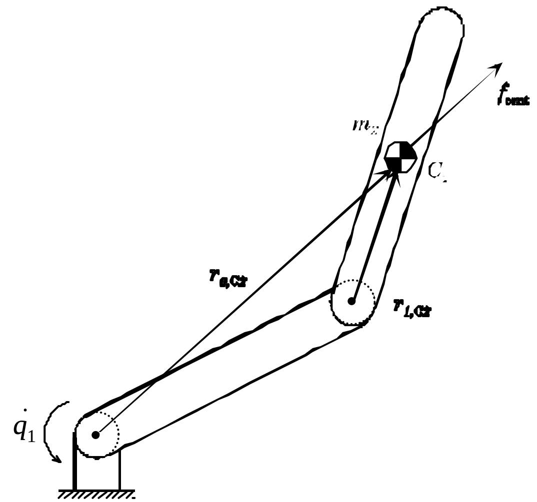
Interpretação Física dos Termos

- **Forças Centrifugas** (termos proporcionais ao quadrado das velocidades)
  - Uma força centrifuga actua sobre o segundo elo no instante em que:

$$\dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0 \Rightarrow \left|f_{cent}\right| = m_2 L \dot{q}_1^2$$

    - Sendo L a distância entre o centróide do elo 2 (C_2) e a junta 1 (O_0)
    - Esta força é paralela ao vector $\boldsymbol{r}_{0,c2}$ e causa um momento em torno da segunda junta dado por:

$$t_{cent} = r_{1,c2} \times f_{cent} = -m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{q}_1^2$$



☞ De modo similar, quando a segunda junta roda com velocidade constante, o binário causado pelos efeitos centrífugos actuam sobre a primeira junta

Manipulador Planar RR

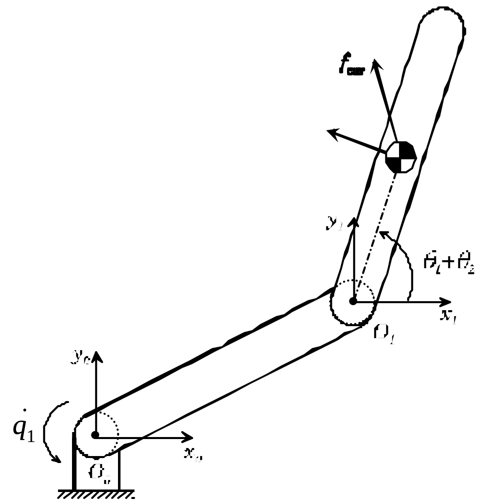
Interpretação Física dos Termos

- **Forças de Coriolis** (termos proporcionais ao produto das velocidades)
  - Quando uma massa ***m*** se move a velocidade ***v*** em relação a um sistema de coordenadas em rotação com velocidade ***w***, a massa sofre uma força de Coriolis dada por:

$$f_{cor} = 2m\,(w \times v)$$

    - Esta força causa um momento em torno da primeira junta dado por:

$$t_{cor} = r_{0,c2} \times f_{cor} = 2m_2 l_1 r_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$



☞ Uma vez que a força de Coriolis actua em paralelo com o elo 2, a força não cria um momento em torno da segunda junta

Manipulador Planar RR

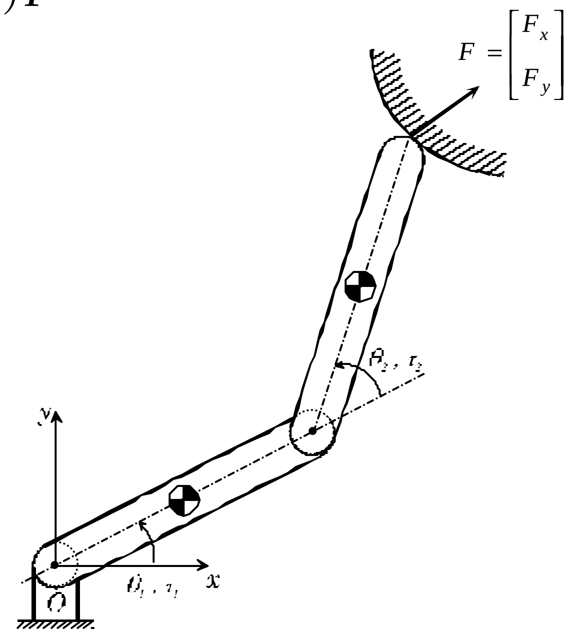
Cadeia Cinemática Fechada

- **Em várias aplicações robóticas, o elemento terminal do manipulador entra em contacto com o meio ambiente criando uma cadeia cinemática fechada**
  - As equações dinâmicas no caso uma só cadeia são dadas por:

$$t = H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) + J^T(q)F$$

☞ A dinâmica da cadeia deve ser combinada com os **constrangimentos** impostos pelo contacto:

- *cinemático*: meio exterior é indeformável
- *dinâmico*: meio exterior tem dinâmica própria

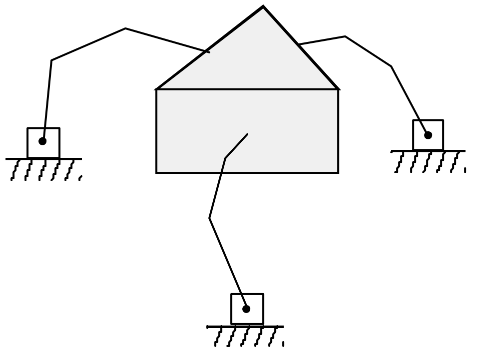


Cadeias Cinemáticas Fechadas

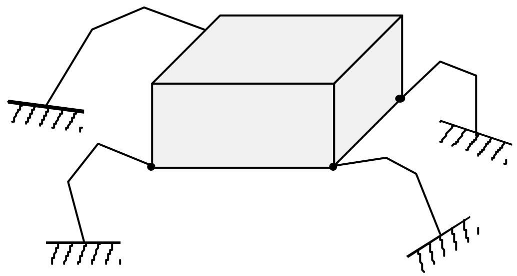
Outros Mecanismos

- **Os dois tipos básicos de mecanismos em cadeia fechada são:**
  - **Tipo 0: cada cadeia está conectada ao corpo do sistema através de uma junta não actuada**
  - **Tipo 1: cada cadeia está conectada ao corpo do sistema por meio de uma junta actuada**

Cooperação de Braços



Robô Multi-pernas



  - O movimento de cada mecanismo está **constrangido** pelas cadeias cinemáticas envolvidas

Dinâmica Directa

- **Na área da simulação, o problema fundamental é obter uma solução para a dinâmica directa**
  - Implica a determinação do movimento nas juntas em resultado do conjunto de forças/binários aplicados nos actuadores
  - Emergiram duas aproximações básicas (cadeias abertas e fechadas):
    - A **inversão da matriz de inércias** para obter a solução das acelerações na forma de um sistema de equações algébricas lineares (complexidade computacional $O(N^3)$)

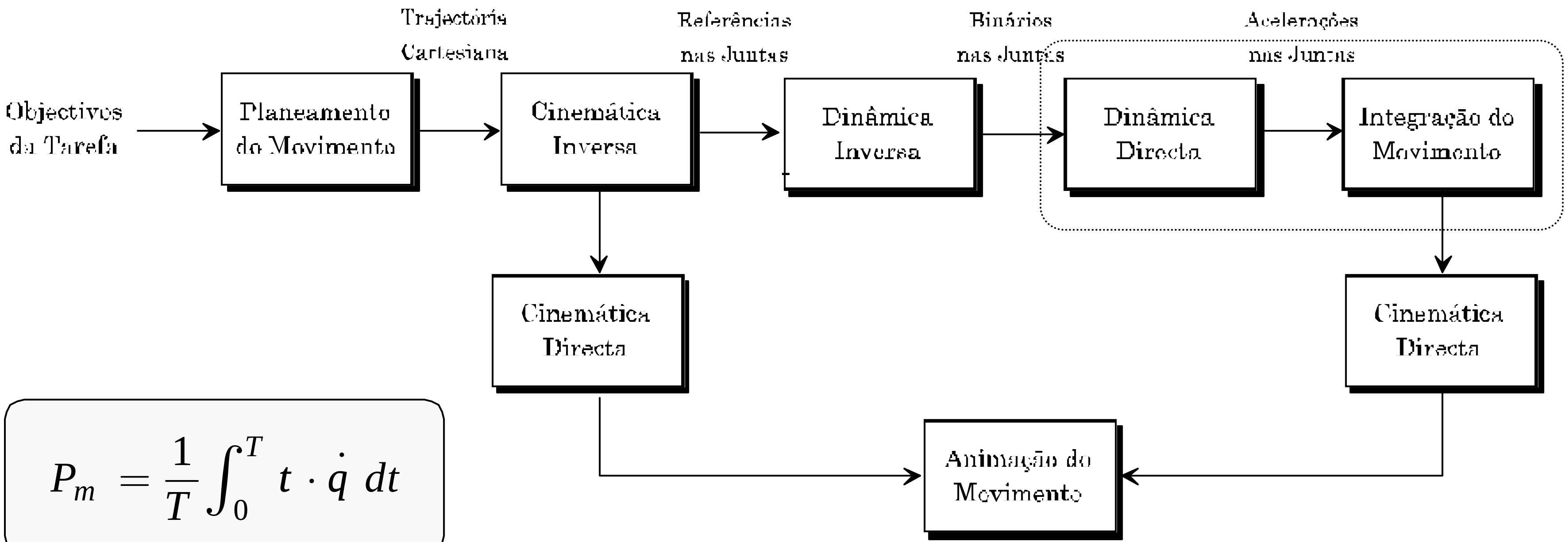
$$\ddot{q} = H^{-1}\left[t - C(q,\dot{q}) - G(q) - J^T(q)F \right]$$

    - Obtenção da solução para as acelerações nas juntas de uma **forma recursiva** linear (a inversão da matriz é explicitamente evitada); complexidade computacional reduz-se a $O(N)$

Simulação de um Sistema Robótico

Diagrama de Blocos

- **A figura descreve os blocos computacionais necessários na simulação dinâmica de um sistema robótico (sem controlo)**



$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T t \cdot \dot{q}\, dt$$

  – Num percurso fechado a potência mecânica média é nula: $P_m = 0$